

MODELADO Y CONTROL CINEMÁTICO DE UN PROTOTIPO VIRTUAL PARA UN
MANIPULADOR SERIAL DE DOS GRADOS DE LIBERTAD TIPO 1RP

MANUEL ALEJANDRO ROJAS DIAZ

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA
22 DE NOVIEMBRE DE 2018

MODELADO Y CONTROL CINEMÁTICO DE UN PROTOTIPO VIRTUAL PARA UN
MANIPULADOR SERIAL DE DOS GRADOS DE LIBERTAD TIPO 1RP

MANUEL ALEJANDRO ROJAS DIAZ

CÓDIGO: 1125622389

Trabajo de investigación formativa para optar al Título de Ingeniero Mecánico

DIRECTOR:

CARLOS ÁNDRES MESA MONTOYA

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA

22 DE NOVIEMBRE DE 2018

ÍNDICE

| | |
|---|-----------|
| CAPÍTULO 1 | 9 |
| INTRODUCCIÓN | 9 |
| 1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA | 9 |
| 1.2 OBJETIVOS | 10 |
| 1.2.1 OBJETIVO GENERAL | 10 |
| 1.2.2 OBJETIVOS ESPECIFICOS | 10 |
| 1.3 ESTRUCTURA DEL TRABAJO DE GRADO | 10 |
| CAPÍTULO 2 | 12 |
| ESTRUCTURA MORFOLÓGICA DEL MANIPULADOR..... | 12 |
| 2.1 INTRODUCCIÓN | 12 |
| 2.2 ESPACIO DE TRABAJO | 13 |
| 2.3 MORFOLOGÍA DEL MANIPULADOR | 15 |
| CAPÍTULO 3 | 18 |
| ANÁLISIS CINEMÁTICO DE UN MANIPULADOR SERIAL 1R1P | 18 |
| 3.1 INTRODUCCIÓN | 18 |
| 3.2 CINEMATICA DIRECTA..... | 18 |
| 3.3 CINEMATICA INVERSA..... | 19 |
| 3.4 VELOCIDAD Y ACELERACIÓN PARA CINEMÁTICA DIRECTA..... | 23 |
| 3.5 VELOCIDAD Y ACELERACIÓN PARA CINEMÁTICA INVERSA..... | 24 |
| CAPÍTULO 4 | 26 |
| MODELO DINÁMICO DEL MANIPULADOR SERIAL 1RP | 26 |
| 4.1 INTRODUCCIÓN | 26 |
| 4.2 FORMULACION NEWTON-EULER | 26 |
| 3.2.1 Modelo dinámico con matriz de inercia diagonal | 30 |
| 3.2.2 Modelo dinámico con matriz de inercia completa | 32 |
| CAPÍTULO 5 | 35 |
| CONTROL CINEMÁTICO DEL MANIPULADOR..... | 35 |
| 5.1 INTRODUCCIÓN | 35 |
| 5.2 FASES DEL CONTROL CINEMÁTICO..... | 36 |
| 5.3 TIPOS DE TRAYECTORIAS | 37 |
| 5.3.1 Trayectorias punto a punto | 37 |
| 5.3.2 Trayectorias continuas..... | 38 |
| 5.4 TÉCNICAS DE INTERPOLACIÓN | 38 |
| 5.4.1. Interpoladores lineales..... | 38 |
| 5.4.2. Interpolador Cubico..... | 38 |
| 5.4.3. Interpolador Spline Akima | 40 |
| 5.5 PRUEBAS EN EL PROTOTIPO DEL MANIPULADOR | 42 |
| 5.5.1 Control cinemático y estudio de posición del manipulador | 42 |

| | |
|--|-----------|
| CAPÍTULO 6 | 51 |
| CONCLUSIONES, APORTES Y RECOMENDACIONES | 51 |
| 6.1 CONCLUSIONES | 51 |
| 6.2 APORTES | 52 |
| 6.3 RECOMENDACIONES | 52 |
| BIBLIOGRAFÍA | 53 |
| ANEXOS | 55 |
| ANEXOS A..... | 55 |
| PLANOS CONSTRUCTIVOS | 55 |

ÍNDICE DE FIGURAS

| | |
|--|----|
| Figura 1. Componentes LEGO del manipulador serial | 12 |
| Figura 2. Control remoto LEGO | 13 |
| Figura 3. Espacio de trabajo con diferentes posiciones de ubicación de la base. Medidas en mm..... | 14 |
| Figura 4. Espacio de trabajo de acuerdo con la posición del bastidor (actuador lineal de 300 mm)..... | 14 |
| Figura 5. Diagrama cinemático del manipulador | 15 |
| Figura 6. Vista isométrica y de planta del manipulador | 16 |
| Figura 7. Vista de planta del manipulador con los marcos de referencia | 17 |
| Figura 8. Ubicación de marco de referencia y del punto extremo del pointer | 19 |
| Figura 9. Vista isométrica y lateral con la configuración y ejes de referencias del manipulador serial IRP | 27 |
| Figura 10. Esquema de control cinemático | 36 |
| Figura 11. Representación línea oblicua en Excel y SolidWorks | 43 |
| Figura 12. Funciones angular y de desplazamiento para la línea oblicua obtenida por la cinemática inversa | 44 |
| Figura 13. Función angular y de desplazamiento para la línea oblicua obtenida por SolidWorks | 44 |
| Figura 14. Representación triángulo rectángulo en Excel y SolidWorks | 45 |
| Figura 15. Funciones angular y de desplazamiento para el triángulo rectángulo obtenida por la cinemática inversa | 46 |
| Figura 16. Función angular y de desplazamiento para el triángulo rectángulo obtenida por SolidWorks | 46 |
| Figura 17. Representación circunferencia en Excel y SolidWorks | 47 |
| Figura 18. Funciones angular y de desplazamiento para la circunferencia obtenida por la cinemática inversa | 48 |
| Figura 19. Función angular y de desplazamiento para la circunferencia obtenida por SolidWorks | 48 |
| Figura 20. Grafica de Fuerza vs Tiempo para la trayectoria circular | 49 |
| Figura 21. Grafica de Par motor vs Tiempo para la trayectoria circular | 50 |

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

La facultad de Ingeniería Mecánica con el apoyo del grupo de investigación en Procesos de manufactura y Diseño de Maquina, junto con la propuesta del departamento de matemáticas del Miami Dade College se propone realizar un proyecto de un manipulador serial con dos grados de libertad. El cual busca utilizar el campo de la robótica y sus modelos matemáticos relacionados, como una alternativa para entender desde una perspectiva práctica y aplicada, algunos conceptos relacionados con la trigonometría y el álgebra lineal.

En la familia de los robots existen una gran variedad de diseños, siendo las más utilizadas en la industria los manipuladores paralelos y manipuladores seriales, estos últimos han sido más estudiados y analizados en cuanto a su fabricación y control. Los manipuladores en serie son encargados de realizar tareas asociadas a procesos de fabricación y de ensamble como son (Rentería Arantxa, Rivas María, 2000): a) soldadura, b) transporte, c) manipulación, d) aplicación de materiales, e) procesos de mecanizado, f) entre otros.

Teniendo en cuenta las diferentes aplicaciones de la robótica serial en el sector productivo, y siendo unas de las configuraciones más conocidas en el ámbito académico, es conveniente utilizar una estructura morfológica abierta, de configuración compacta y simple, que permita obtener un prototipo virtual en el que se pueda realizar pruebas y validaciones numéricas de la posición, velocidad y aceleración presente en los eslabones del manipulador, mediante las ecuaciones basadas en formulaciones trigonométricas y álgebra matricial.

1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Actualmente la Miami Dade College utiliza un manipulador ensamblado con componentes LEGO en un espacio de trabajo limitado, que cumple de manera rudimentaria con la generación de algunas trayectorias básicas dentro de su espacio de trabajo.

Por otro lado, el sistema utilizado actualmente presenta algunas dificultades adicionales, tales como la ausencia de los modelos cinemáticos (directo e inverso) necesarios para la implementación de un sistema de planificación de trayectorias. Otra dificultad que se tiene es la configuración del hardware utilizado para el control de los actuadores del sistema, el cual es cerrado y restringido, lo que impone una dificultad adicional a la hora de implementar nuevas estrategias de control en un futuro.

Con lo expuesto anteriormente, se genera la necesidad de efectuar un estudio que incorpore un sistema de control cinemático en el manipulador serial con morfología 1 RP, para poder ejecutar fácilmente las diferentes trayectorias que se deseen implementar dentro de un espacio de trabajo establecido. De la misma forma se busca ayudar a los estudiantes de la facultad de ingeniería mecánica y de la Miami Dade College, a comprender de una manera más sencilla conceptos fundamentales de la robótica, en las materias que se proponen dentro del nuevo plan de estudios.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 OBJETIVO GENERAL

Modelar y controlar cinemáticamente un prototipo virtual de un manipulador serial de dos grados de libertad, el cual permita implementar diferentes trayectorias de la herramienta terminal dentro de un espacio de trabajo cartesiano.

1.2.2 OBJETIVOS ESPECIFICOS

- Definir la estructura morfológica del manipulador, teniendo en cuenta los eslabones y pares cinemáticos que lo conforma de acuerdo con el espacio de trabajo.
- Obtener el modelo cinemático inverso y directo para el manipulador, que permita definir la posición, velocidad y aceleración de los eslabones y pares cinemáticos.
- Definir el modelo dinámico del manipulador, con el fin de determinar las fuerzas y pares motores demandados por el dispositivo.
- Diseñar el control cinemático del prototipo virtual del manipulador, con el propósito de validar los modelos cinemáticos utilizando diferentes trayectorias para la herramienta terminal.

1.3 ESTRUCTURA DEL TRABAJO DE GRADO

En el Capítulo 2 se estudiará la estructura mecánica del prototipo virtual del manipulador identificando los actuadores y movimientos que puede generar. Adicionalmente se seleccionará un espacio de trabajo adecuado con el fin de realizar diversas trayectorias, al mismo tiempo se identificará cual es la mejor ubicación del bastidor del prototipo virtual, con el objetivo de desaprovechar el menor área posible del espacio de trabajo. Por último se mostrará el ensamble completo del prototipo virtual y sus respectivos ejes de referencia.

En el Capítulo 3 se estudiará el comportamiento cinemático del prototipo virtual del manipulador serial. Primeramente, se definirá la cinemática directa del manipulador para definir la posición en función de las coordenadas generalizadas. Luego se planteará la cinemática inversa, donde se calcularán las coordenadas generalizadas a partir de un punto específico del pointer. Para finalizar, se hallarán las velocidades y aceleraciones del prototipo tanto para la cinemática directa como para la inversa.

Con el fin de cumplir el tercer objetivo específico de definir el modelo dinámico del prototipo, en el Capítulo 4 se planteará la formulación Newton Euler, en el cual se definen unos marcos de referencia específicos y se realizará un proceso algebraico, de esta forma se podrán obtener las ecuaciones de par motor y fuerza necesarios para generar movimiento en el manipulador. Este modelo se calculará para dos matrices de momentos de inercia, una matriz diagonal y una matriz completa.

Después de obtener la cinemática y el modelo dinámico del manipulador se realizará el control cinemático en el Capítulo 5, donde se explicará la metodología que se planteó para desarrollar el control cinemático. Además, se mostrarán unas comparaciones entre los resultados obtenidos mediante la cinemática inversa y los datos obtenidos utilizando la herramienta computacional SolidWorks. Para finalizar, se visualizarán las gráficas obtenidas de las simulaciones para el par motor y la fuerza que se aplica en los actuadores.

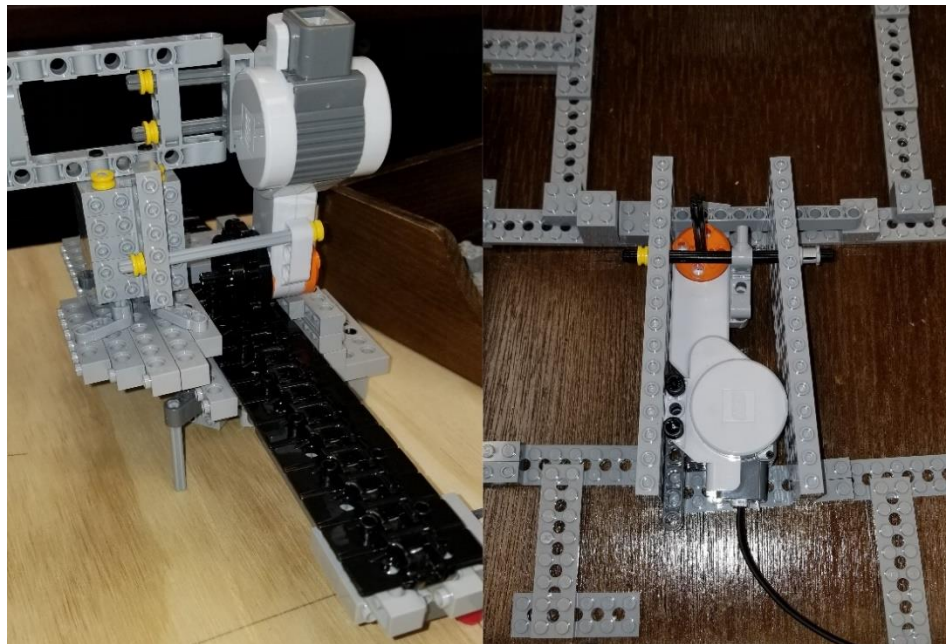
CAPÍTULO 2

ESTRUCTURA MORFOLÓGICA DEL MANIPULADOR

2.1 INTRODUCCIÓN

Desde el departamento de matemáticas del Miami Dade College requiere para sus procesos de enseñanza realizar un manipulador serial que cumpla el propósito de realizar geometrías simples en un plano, con medidas características de un formato carta o un formato DIN A3. Este requerimiento se realizó, ya que en sus laboratorios trabajaban con un manipulador hecho a base de componentes LEGO con un espacio de trabajo reducido, tal y como se muestra en la figura 1. Este manipulador no cuenta con modelos cinemáticos, los cuales son importantes para desarrollar las trayectorias deseadas.

Figura 1. Componentes LEGO del manipulador serial



Por otro lado, el control de los actuadores se realiza mediante el uso de un control alámbrico LEGO; esto añade una limitante adicional, relacionada con la generación de trayectoria, las

cuales dependerán única y exclusivamente de la destreza del manipulador. La morfología del manipulador cuenta un motor LEGO con una junta rotacional, un motor LEGO con una junta prismática, una CPU LEGO (figura 2) y una caja convencional que sirve como bastidor para el manipulador.

Figura 2. Control remoto LEGO



2.2 ESPACIO DE TRABAJO

Debido a las dificultades funcionales que presenta el manipulador de componentes LEGO, se decidió realizar una propuesta donde se aplicará conceptos de diseño para desarrollar un manipulador que cumpla con todas las exigencias tenga una morfología con características de movimiento relativo similar.

Para empezar, se planteó tres diferentes alternativas para un nuevo espacio de trabajo: a) primero se pensó en un formato DIN A4, b) después en un formato tamaño carta y c) basados en un formato DIN A3. Se empezaron a desarrollar los primeros planos con la idea de implementar un formato tamaño carta ya que en comparación con el DIN A4 tiene dimensiones un poco más grandes, además en un principio se había descartado trabajar con el formato DIN A3 debido que presentaba unas dimensiones muy grandes para trabajar con ciertos actuadores lineales que se habían considerado. No obstante, se encontró un catálogo de actuadores lineales que contaba con husillos suficientemente grandes que podían cumplir con las medidas del formato DIN A3, por esta razón se decidió seleccionar este formato que cuenta con las siguientes medidas: 297 mm de alto por 420 mm de ancho. Estas medidas son lo considerablemente grandes como para tener un espacio de trabajo amplio, pudiendo realizar dentro de él diferentes figuras geométricas con una variedad de alternativas dimensionales.

Después de haber seleccionado las dimensiones del espacio de trabajo, se planteó la posición de la base del manipulador, tal como se muestra en la figura 3 y en la figura 4. La posición *B* fue la primera en ser descartada ya que si la base del manipulador se ubicaba en ese punto se perdería un área importante del espacio de trabajo. La posición *D* fue la segunda en ser rechazada debido a que el husillo no tiene una longitud superior a 400 mm (Thompson, 2002),

por lo que habría ciertas zonas donde el manipulador no podría realizar ningún trazado. El punto A fue el último en ser excluido en vista de que la longitud de la diagonal del rectángulo es de 514 mm de manera que también se desaprovecharía una superficie importante. Por lo tanto, el mejor punto para ubicar la base es el punto C ya que es la posición en la cual el manipulador puede abarcar más área de trabajo (Angulo. J.M, Romero. S, Martínez, 2005).

Figura 3. Espacio de trabajo con diferentes posiciones de ubicación de la base.

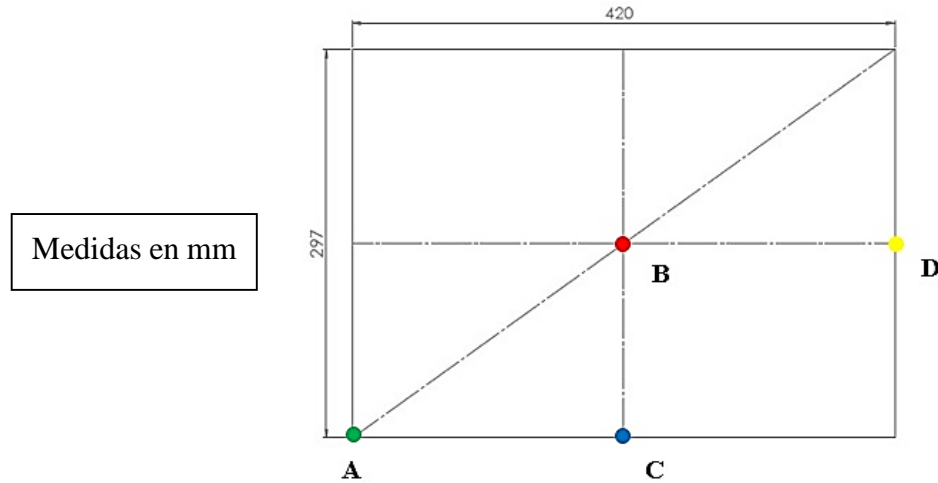
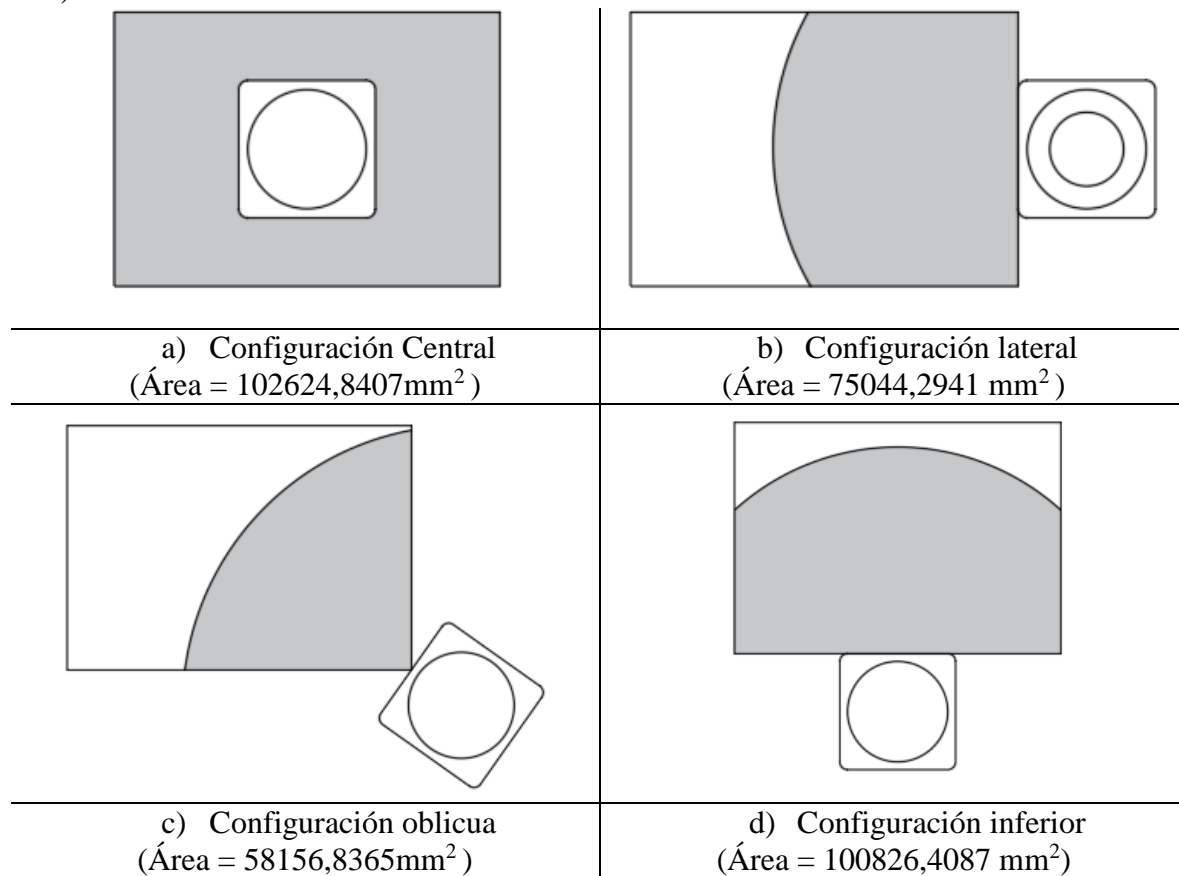


Figura 4. Espacio de trabajo de acuerdo con la posición del bastidor (actuador lineal de 300 mm)

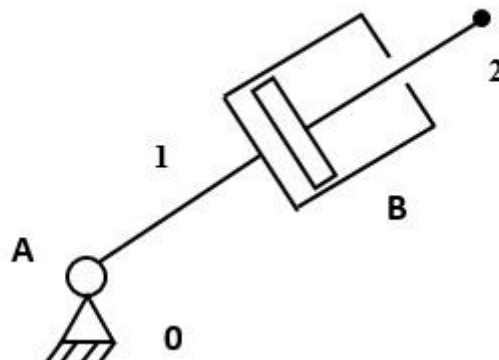


Por lo anterior, se selecciona la configuración inferior, ya que permite una de las mayores áreas de interacción dentro del espacio de trabajo y permite una posibilidad de plasmar figuras geométricas de mayores proporciones respecto al formato de papel definido.

2.3 MORFOLOGÍA DEL MANIPULADOR

Como se mencionó anteriormente se conservó la misma morfología de la configuración inicial del manipulador. Por lo tanto, la configuración a utilizar está compuesta por un par de revolución y por un par prismático tal como se muestra en la figura 4. Aplicando la fórmula de movilidad para un mecanismo plano se tiene que (Norton Robert L, 2000; Shigley, Josehp E & Uicker John J, 1993):

Figura 5. Diagrama cinemático del manipulador



$$w = 3n - 2P_v \quad \text{Ec. 2.1}$$

$$w = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = 2$$

Por consiguiente mediante esta ecuación se puede corroborar que el manipulador cuenta con dos grados de libertad, el par A proporciona un movimiento rotacional y el par B un desplazamiento longitudinal.

Por otro lado, la estructura del manipulador cuenta con las piezas que se encuentran en la tabla 1, las cuales están ensambladas tal y como se puede observar en la figura 5.

Figura 6. Vista isométrica y de planta del manipulador

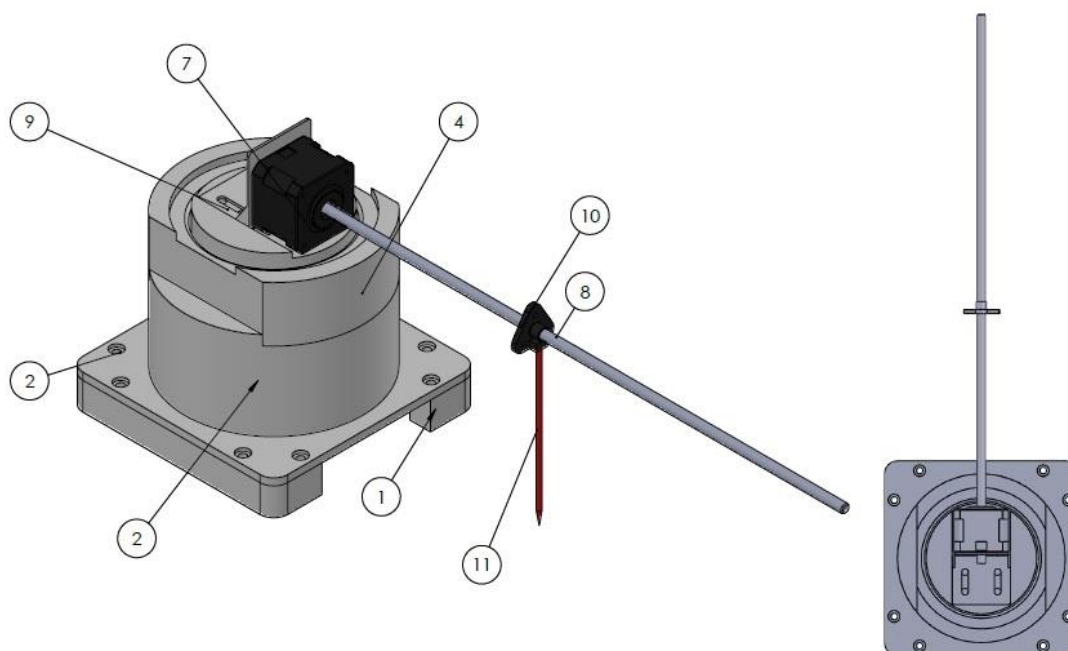


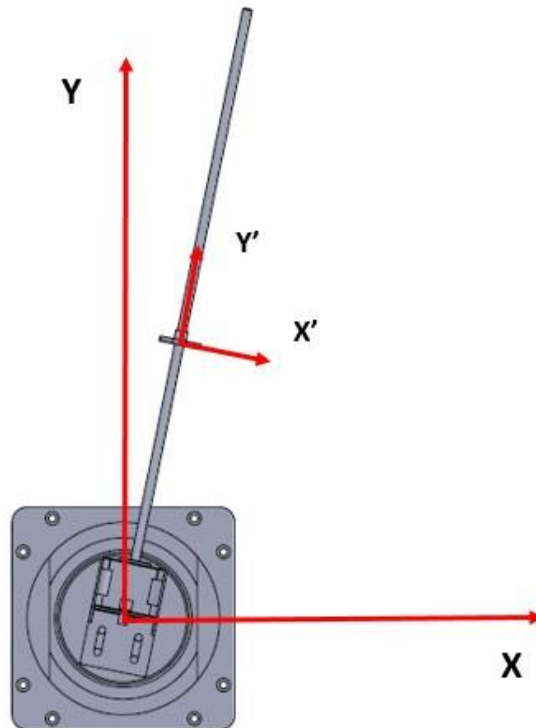
Tabla 1. Componentes del manipulador

| ELEMENTO | CANTIDAD | NOMBRE DE LA PIEZA |
|----------|----------|-------------------------|
| 1 | 2 | Soporte plataforma |
| 2 | 1 | Plataforma |
| 3 | 1 | Bastidor secundario |
| 4 | 1 | Bastidor primario |
| 5 | 1 | Soporte actuador |
| 6 | 1 | Rodamiento |
| 7 | 1 | Actuador Lineal NEMA 23 |
| 8 | 1 | Husillo |
| 9 | 1 | Stepper |
| 10 | 1 | Brida |
| 11 | 1 | Pointer |

El manipulador tiene una estructura constituida por una plataforma que se encuentra fija a dos soportes, la plataforma esta ensamblada al bastidor secundario y este a su vez del bastidor primario; estas cuatro piezas conforman la base del manipulador. La base del manipulador se le acoplo el soporte del actuador, el cual esta ensamblado con un motor pasó a paso; este permite al soporte la rotación sobre su eje. El actuador lineal viene ensamblado con un

soporte tipo ángulo 90°, adicionalmente el actuador trae acoplado un husillo que puede girar sobre su propio eje y permite un desplazamiento longitudinal de una brida a lo largo del husillo. Por último, a la brida se le ensambla un pointer que permite dibujar las trayectorias. En el anexo A se pueden visualizar todos los planos constructivos y de detalle de las piezas del manipulador. Adicionalmente en la figura 6 se puede ver el marco de referencia que se propuso, el cual es centro de rotación de la pieza y punto de origen desde donde se mide el desplazamiento del pointer.

Figura 7. Vista de planta del manipulador con los marcos de referencia



CAPÍTULO 3

ANÁLISIS CINEMÁTICO DE UN MANIPULADOR SERIAL 1R1P

3.1 INTRODUCCIÓN

En el siguiente capítulo se procede a hacer el análisis cinemático del manipulador sin tener en cuenta los valores de las fuerzas o pares de motores, es decir, un estudio que se enfoca en las restricciones al movimiento limitadas por las cadenas cinemáticas (Lopez-Cajún Carlos S., & Ceccarelli M, 2008). Primero se va a calcular la cinemática directa e inversa para poder establecer la posición del pointer con respecto a la base del manipulador, en la cual se definirá el origen del sistema. Posteriormente se realizará un análisis cinemático tanto en velocidad como en aceleración, en los cuales se buscará un resultado para las ecuaciones de cinemática directa y la cinemática inversa. Este último procedimiento se efectuará mediante la primera y la segunda derivada de las ecuaciones de posición.

3.2 CINEMATICA DIRECTA

La cinemática directa busca determinar la posición de un punto específico del pointer en función de las coordenadas generalizadas del manipulador (a) θ coordenada generalizada para la rotación y b) d coordenada generalizada para la translación) (Tsai, 1999). En esta primera parte, se planteará las ecuaciones para la cinemática directa, donde θ y d se puede determinar los valores de X_p y Y_p en dos ecuaciones planteando las siguientes relaciones trigonométricas:

$$\cos \theta = \frac{x_p}{d} \quad \text{Ec. 3.1}$$

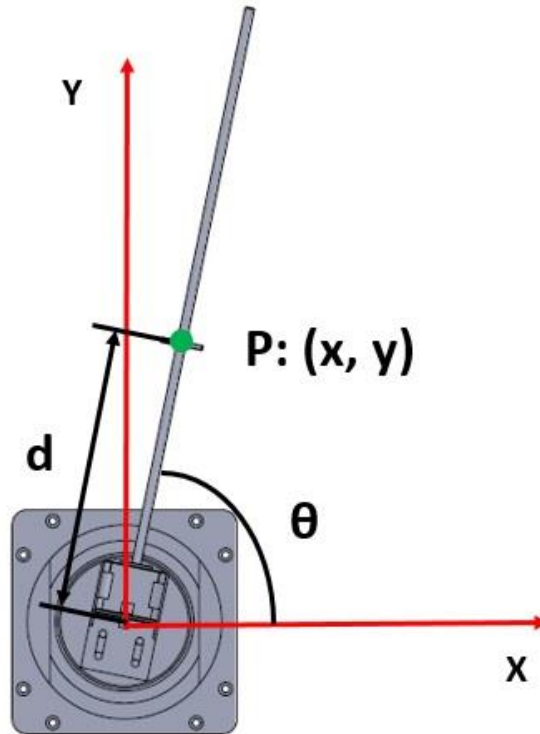
$$\sin \theta = \frac{y_p}{d} \quad \text{Ec. 3.2}$$

Escrito de otra manera, se tiene:

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \cdot \cos \theta \\ d \cdot \sin \theta \end{bmatrix}$$

Punto específico del extremo del pointer P , respecto a los valores de entrada d y θ .

Figura 8. Ubicación de marco de referencia y del punto extremo del pointer



3.3 CINEMATICA INVERSA

El objetivo de la cinemática inversa es conocer la posición de los actuadores o partes móviles del manipulador utilizando como referencia un sistema coordenado cartesiano. Por lo tanto, partiendo de un marco de referencia OXY se pretende determinar las coordenadas generalizadas de translación d y de rotación θ , teniendo presente la posición x_p y y_p del pointer.

- Para la coordenada generalizada d :
Como d , representa la hipotenusa de un triángulo rectángulo, formado por catetos x_p y y_p , se puede expresar la siguiente ecuación:

$$d = \pm \sqrt{x_p^2 + y_p^2} \quad \text{Ec. 3.3}$$

Por lo tanto se cuenta con dos soluciones para d , que dependerán de resultado encontrado para la posición angular θ .

- Para la coordenada generalizada θ :
Con el propósito de relacionar la variable θ , con los valores de x_p y y_p , se propone el siguiente cambio de variable:

$$\frac{\theta}{2} = \tan^{-1}(q) \quad \text{Ec. 3.4}$$

Además, se proponen las siguientes identidades trigonométricas para facilitar el procedimiento:

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \quad \text{Ec. 3.5}$$

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta \quad \text{Ec. 3.6}$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \quad \text{Ec. 3.7}$$

$$\sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) = \frac{1 - \cos \theta}{2} \quad \text{Ec. 3.8}$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) \quad \text{Ec. 3.9}$$

Con base en las ecuaciones anteriores se pretende realizar un proceso algebraico con el fin de determinar una ecuación (en términos de x_p y y_p), utilizando la ecuación **Ec. 3.4**. Por tanto de las ecuaciones **Ec. 3.5** y **Ec. 3.6**, se tiene:

$$d = \frac{x_p}{\cos \theta} \quad \text{Ec. 3.10}$$

$$d = \frac{y_p}{\sin \theta} \quad \text{Ec. 3.11}$$

Igualando **Ec 3.10** y **Ec. 3.11**, se tiene:

$$\frac{x_p}{y_p} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad \text{Ec. 3.12}$$

Sustituyendo **Ec. 3.4** y **Ec. 3.7** en **Ec. 3.6**:

$$1 + \tan^2(\tan^{-1}(q) + 0) = 1 + q^2 = \frac{1}{\cos^2(\tan^{-1}(q) + 0)}$$

$$1 + q^2 = \frac{1}{\cos^2(\tan^{-1}(q))}$$

Por lo que:

$$\cos^2(\tan^{-1}(q)) = \frac{1}{1 + q^2} \quad \text{Ec. 3.13}$$

Remplazando **Ec. 3.13** en **Ec. 3.5**:

$$\sin^2(\tan^{-1}(q)) = 1 - \cos^2(\tan^{-1}(q))$$

$$\sin^2(\tan^{-1}(q)) = 1 - \frac{1}{1 + q^2}$$

$$\sin^2(\tan^{-1} q) = \frac{q^2}{1 + q^2} \quad \text{Ec. 3.14}$$

Por lo tanto al remplazar **Ec. 3.14** en **Ec. 3.8** se obtiene:

$$\sin^2(\tan^{-1} q) = \frac{1 - \cos(2\tan^{-1} q)}{2}$$

$$\cos(2\tan^{-1} q) = 1 - 2 \sin^2(\tan^{-1} q)$$

$$\cos(2\tan^{-1} q) = 1 - 2 \left(\frac{q^2}{1 + q^2} \right)$$

$$\cos(2\tan^{-1} q) = \frac{1 - q^2}{1 + q^2} \quad \text{Ec. 3.15}$$

Remplazando **Ec. 3.13**, **Ec. 3.14** y **Ec. 3.15** en **Ec. 3.9**:

$$\sin(2 \tan^{-1}(q)) = 2 \cdot \sin(\tan^{-1} q) \cdot \cos(\tan^{-1} q)$$

$$\sin(2 \tan^{-1} q) = 2 \cdot \left(\frac{q}{\sqrt{1 + q^2}} \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 + q^2}} \right)$$

$$\sin(2 \tan^{-1} q) = \frac{2q}{1 + q^2} \quad \text{Ec. 3.16}$$

Remplazando **Ec. 3.4**, **Ec. 3.5** y **Ec. 3.16** en **Ec. 3.12**:

$$\frac{x_p}{y_p} = \frac{\sin[2 \cdot \tan^{-1}(q)]}{\cos[2 \cdot \tan^{-1}(q)]} = \frac{2 \cdot q}{1 - q^2}$$

Despejando para q , se tiene:

$$q^2 + 2q \left(\frac{x_p}{y_p} \right) - 1 = 0 \quad \text{Ec. 3.17}$$

Aplicando la solución cuadrática se obtiene:

$$q = \frac{-2 \frac{x_p}{y_p} \pm \sqrt{\left(-2 \frac{x_p}{y_p}\right)^2 - 4 \cdot (-1)}}{2} = -\frac{x_p}{y_p} \pm \frac{\sqrt{x_p^2 + y_p^2}}{y_p}$$

$$q = \frac{-x_p \pm \sqrt{x_p^2 + y_p^2}}{y_p} \quad \text{Ec. 3.18}$$

Donde q tendrá dos posibles soluciones:

$$q_1 = \frac{-x_p + \sqrt{x_p^2 + y_p^2}}{y_p} \quad \text{Ec. 3.19}$$

$$q_2 = \frac{-x_p - \sqrt{x_p^2 + y_p^2}}{y_p} \quad \text{Ec. 3.20}$$

Con $\theta = 2 \cdot \tan^{-1}(q)$

Finalmente las ecuaciones **Ec. 3.19** y **Ec. 3.20** son las que relacionan el desplazamiento angular en función de x_p y y_p .

3.4 VELOCIDAD Y ACELERACIÓN PARA CINEMÁTICA DIRECTA

Partiendo de las siguientes ecuaciones de posición halladas en el primer literal:

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \cdot \cos \theta \\ d \cdot \sin \theta \end{bmatrix}$$

Se pretende derivarlas para poder obtener las ecuaciones de velocidad, por lo tanto quedaría el siguiente procedimiento:

$$\frac{dx_p}{dt} = \frac{dd}{dt} \cos \theta - d \sin \theta \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{dy_p}{dt} = \frac{dd}{dt} \sin \theta + d \cos \theta \frac{d\theta}{dt}$$

O escrito de otra manera:

$$\begin{bmatrix} v_{xp} \\ v_{yp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -d \sin \theta \\ \sin \theta & d \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{d} \\ \omega \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 3.21}$$

donde $\dot{d} = \frac{dd}{dt}$ y $\omega = \frac{d\theta}{dt}$

Ahora para calcular las ecuaciones de aceleración se procede a realizar la segunda derivada de las ecuaciones de posición, por consiguiente se tiene que:

$$\frac{d^2 x_p}{dt^2} = \frac{d^2 d}{dt^2} \cos \theta - \frac{dd}{dt} \sin \theta \frac{d\theta}{dt} - \frac{dd}{dt} \sin \theta \frac{d\theta}{dt} - d \cos \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - d \sin \theta \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2 x_p}{dt^2} = \frac{d^2 d}{dt^2} \cos \theta - 2 \frac{dd}{dt} \sin \theta \frac{d\theta}{dt} - d \cos \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - d \sin \theta \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2 y_p}{dt^2} = \frac{d^2 d}{dt^2} \sin \theta + \frac{dd}{dt} \cos \theta \frac{d\theta}{dt} + \frac{dd}{dt} \cos \theta \frac{d\theta}{dt} + d \sin \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + d \cos \theta \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2 y_p}{dt^2} = \frac{d^2 d}{dt^2} \sin \theta + 2 \frac{dd}{dt} \cos \theta \frac{d\theta}{dt} + d \sin \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + d \cos \theta \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

Organizando estas expresiones de forma matricial queda de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} a_{xp} \\ a_{yp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -d \sin \theta \\ \sin \theta & d \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{d} \\ \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \sin \theta & -d \cos \theta \\ 2 \cos \theta & -d \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{d} \omega \\ \omega^2 \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 3.22}$$

donde:

$$\ddot{d} = \frac{d^2 d}{dt^2}$$

$$\alpha = \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

3.5 VELOCIDAD Y ACELERACIÓN PARA CINEMÁTICA INVERSA

Partiendo de las expresiones calculadas en la sección 3.4, se pretende hallar las ecuaciones tanto para la velocidad como para la aceleración utilizando el método de la matriz jacobiana.

Para la velocidad, las expresiones quedarían de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} v_{xp} \\ v_{yp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -d \sin \theta \\ \sin \theta & d \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{d} \\ \omega \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{d} \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -d \sin \theta \\ \sin \theta & d \cos \theta \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} v_{xp} \\ v_{yp} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_{xp} \\ v_{yp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{\sin \theta}{d} & \frac{\cos \theta}{d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{d} \\ \omega \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 3.23}$$

Para la aceleración las expresiones serian:

$$\begin{bmatrix} a_{xp} \\ a_{yp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -d \sin \theta \\ \sin \theta & d \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{d} \\ \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \sin \theta & -d \cos \theta \\ 2 \cos \theta & -d \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{d} \omega \\ \omega^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{d} \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -d \sin \theta \\ \sin \theta & d \cos \theta \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_{xp} \\ a_{yp} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \sin \theta & -d \cos \theta \\ 2 \cos \theta & -d \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{d} \omega \\ \omega^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{xp} \\ a_{yp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{\sin \theta}{d} & \frac{\cos \theta}{d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{d} \\ \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -d \\ \frac{2}{d} & -0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{d} \omega \\ \omega^2 \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 3.24}$$

CAPÍTULO 4

MODELO DINÁMICO DEL MANIPULADOR SERIAL 1RP

4.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se determinará el modelo dinámico del manipulador serial, el cual permite calcular la relación que existe entre las fuerzas requeridas sobre los elementos móviles del manipulador para que ocasionen un movimiento específico a lo largo del espacio de trabajo. En este caso se utilizará la formulación de Newton-Euler (Martin George H, 2002), donde al tener dos grados de libertad la dificultad disminuye, no obstante, es un proceso largo ya que relaciona muchas variables específicas del manipulador como la posición, velocidad y aceleración del manipulador; fuerzas y pares que se ejercen sobre los actuadores y parámetros dimensionales del manipulador como longitud, masas e inercia de las piezas.

4.2 FORMULACION NEWTON-EULER

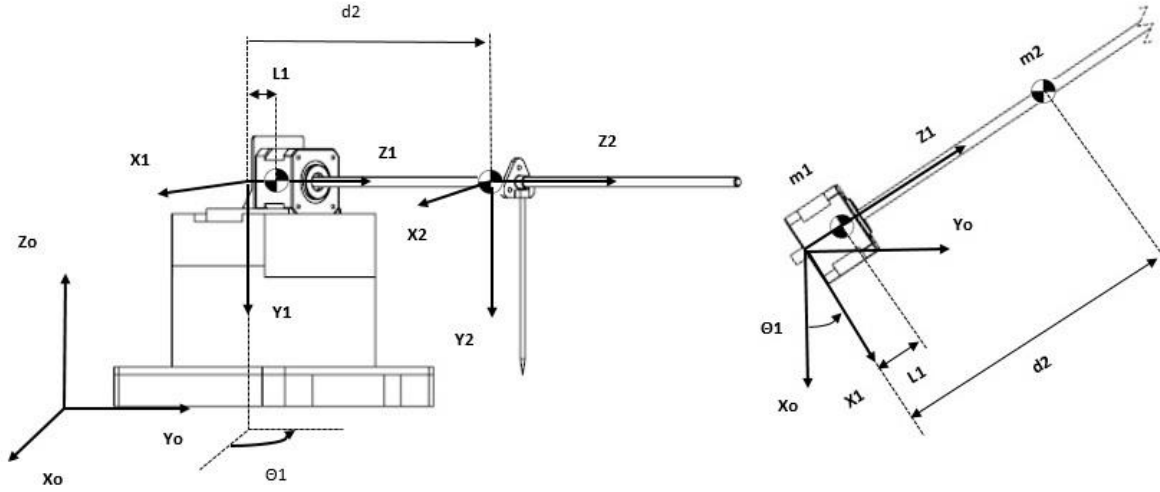
Para calcular el modelo dinámico del manipulador se va utilizar el método de Newton-Euler, como ya se mencionó anteriormente esta formulación involucra la gravedad y fuerzas inerciales. La formulación de Newton-Euler parte del equilibrio dinámico de las fuerzas y pares, tal y como se observa en la ecuación 4.1 (Barrientos, Peñín, Balaguer & Aracil, 1996):

$$\sum F = m\dot{v} \quad \sum T = I \cdot \omega + \omega \times (I \cdot \omega) \quad \text{Ec. 4.1}$$

Para realizar correctamente este procedimiento primero es necesario establecer un eje de coordenadas en una posición correcta tal como se muestra en la figura 9, ya que esto permite identificar de una manera más sencilla todos los datos y puntos que se deben analizar. Realizando esta función se puede hacer una formulación de ecuaciones más fácil, ya que la idea es identificar los actuadores y obtener tanto la posición, velocidad y aceleración de estos elementos con respecto a la base fija, obteniendo estos datos se puede

proceder al cálculo de fuerzas y pares que actúan sobre estas piezas, de esta forma se obtendría el modelo dinámico.

Figura 9. Vista isométrica y lateral con la configuración y ejes de referencias del manipulador serial 1RP



Esta formulación utiliza operaciones vectoriales con productos escalares y vectoriales entre magnitudes vectoriales, además de productos de matrices con vectores. Los pasos a seguir son los siguientes (Barrientos, Peñin, Balaguer & Aracil, 1996):

Se hallan las matrices de rotación ${}^{i-1}R_i$ y sus inversas ${}^iR_{i-1} = ({}^{i-1}R_i)^{-1} = ({}^{i-1}R_i)^T$, las cuales son:

$$\begin{aligned} {}^0R_1 &= \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 \\ S_1 & 0 & C_1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} & {}^1R_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & {}^0R_2 &= \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 \\ S_1 & 1 & C_1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ {}^1R_0 &= \begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -S_1 & C_1 & 0 \end{bmatrix} & {}^2R_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & {}^2R_0 &= \begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -S_1 & C_1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Teniendo las matrices de rotación se deben establecer las condiciones iniciales que son:

Para el sistema de la base S_0 :

${}^0\omega_0$: velocidad angular

${}^0\dot{\omega}_0$: aceleración angular

0v_0 : velocidad lineal

${}^0\dot{v}_0$: aceleración lineal

iS_i : Coordenadas del centro de masa del eslabón i respecto del sistema

iP_i : Coordenadas del origen del sistema $[S_i]$ respecto a $[S_{i-1}] = [a_i, d_iS_i, d_iC_i]$

iI_i : Matriz de inercia del eslabón i respecto de su centro de masa expresado en $[S_i]$

$${}^0\omega_a = [0 \ 0 \ 0]^T \quad {}^0\dot{\omega}_0 = [0 \ 0 \ 0]^T$$

$$\begin{aligned}
{}^0v_0 &= [0 \quad 0 \quad 0]^T & {}^0\dot{v}_0 &= [0 \quad 0 \quad g]^T \\
z_0 &= [0 \quad 0 \quad 1]^T & {}^1p_1 &= [0 \quad 0 \quad 0]^T & {}^2p_2 &= [0 \quad 0 \quad d_2]^T \\
{}^1S_1 &= [0 \quad 0 \quad L_1]^T & {}^2S_2 &= [0 \quad 0 \quad 0]^T
\end{aligned}$$

La velocidad angular, aceleración angular y la velocidad lineal son cero, ya que la base del manipulador no está en movimiento. Ahora es necesario determinar los momentos de inercia, donde para este trabajo se obtendrá un modelo dinámico tanto con una matriz de inercia diagonal, como con una matriz de inercia completa (despreciando los productos inerciales).

$$\begin{aligned}
{}^1I_{1a} &= \begin{bmatrix} I_{xx1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz1} \end{bmatrix} & {}^2I_{2a} &= \begin{bmatrix} I_{xx2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz2} \end{bmatrix} \\
{}^1I_{1b} &= \begin{bmatrix} I_{xx1} & I_{xy1} & I_{xz1} \\ I_{yx1} & I_{yy1} & I_{yz1} \\ I_{zx1} & I_{zy1} & I_{zz1} \end{bmatrix} & {}^2I_{2b} &= \begin{bmatrix} I_{xx2} & I_{xy2} & I_{xz2} \\ I_{yx2} & I_{yy2} & I_{yz2} \\ I_{zx2} & I_{zy2} & I_{zz2} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Para calcular la velocidad angular del sistema $\{S_i\}$ se aplican las siguientes ecuaciones:

- Como el actuador es de rotación es necesario utilizar:

$$\begin{aligned}
{}^1\omega_1 &= {}^1R_0 ({}^0\omega_0 + z_0 \dot{\theta}_1) & \text{Ec. 4.2} \\
&= \begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -S_1 & C_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

- Para el segundo actuador se utiliza la ecuación de translación:

$$\begin{aligned}
{}^2\omega_2 &= {}^2R_1 {}^1\omega_1 & \text{Ec. 4.3} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Para hallar la aceleración angular del sistema $\{S_i\}$ es necesario utilizar estas ecuaciones:

- La ecuación para el actuador de rotación es:

$${}^1\dot{\omega}_1 = {}^1R_0 ({}^0\dot{\omega}_0 + z_0 \ddot{\theta}_1) + {}^0\omega_0 \times z_0 \dot{\theta}_1 = \text{Ec. 4.4}$$

$$= \begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -S_1 & C_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Para el actuador de traslación se utiliza:

$${}^2\dot{\omega}_2 = {}^2R_1{}^1\dot{\omega}_1 \quad \text{Ec. 4.5}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -\ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La aceleración lineal del sistema $\{S_i\}$ se determina con estas ecuaciones:

- Para el actuador de rotación:

$${}^1\dot{v}_1 = {}^1\dot{\omega}_1 \times {}^1p_1 + {}^1\omega_1 \times ({}^1\omega_1 \times {}^1p_1) + {}^1R_0{}^0\dot{v}_0 = \quad \text{Ec. 4.6}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ -\ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -S_1 & C_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Con el actuador de traslación se utiliza la ecuación:

$${}^2\dot{v}_2 = {}^2R_1(z_0\ddot{d}_2 + {}^1\dot{v}_1) + {}^2\dot{\omega}_2 \times {}^2p_2 + {}^2\omega_2 \times ({}^2R_1z_0\dot{d}_2) + {}^2\omega_2 \times ({}^2\omega_2 \times {}^2p_2) \quad \text{Ec. 4.7}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{d}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 0 \\ -\ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{d}_2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{d}_2 \end{bmatrix} \right) \\ &\quad + \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{d}_2 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ -g \\ \dot{d}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_1 \dot{d}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_1 \dot{d}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\theta}_1^2 \dot{d}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_1 \dot{d}_2 - 2\dot{\theta}_1 \dot{d}_2 \\ -g \\ \dot{d}_2 - \dot{\theta}_1^2 \dot{d}_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Para calcular la aceleración lineal del centro de gravedad del actuador 1 y 2 se emplean las siguientes expresiones:

$${}^1a_1 = {}^1\dot{\omega}_1 \times {}^1s_1 + {}^1\omega_1 \times ({}^1\omega_1 \times {}^1s_1) + {}^1\dot{v}_1 = \quad \text{Ec. 4.8}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ -\ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} x \left(\begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L_1 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_1 L_1 \\ -g \\ -\dot{\theta}_1^2 L_1 \end{bmatrix}$$

$${}^2a_2 = {}^2\dot{\omega}_2 x^2s_2 + {}^1\omega_2 x ({}^2\omega_2 x^2s_2) + {}^2\dot{v}_2 = \quad \text{Ec. 4.9}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} 0 \\ -\ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} x \left(\begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_1 d_2 - 2\dot{\theta}_1 \dot{d}_2 \\ -g \\ \ddot{d}_2 - \dot{\theta}_1^2 d_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_1 d_2 - 2\dot{\theta}_1 \dot{d}_2 \\ -g \\ \ddot{d}_2 - \dot{\theta}_1^2 d_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ya teniendo las expresiones de aceleración para cada actuador, es posible calcular la fuerza ejercida en el actuador 1 y 2.

$${}^2f_2 = {}^2R_3 {}^3f_3 + m_2 {}^2a_2 \quad \text{Ec. 4.10}$$

$$= {}^2R_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + m_2 \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_1 d_2 - 2\dot{\theta}_1 \dot{d}_2 \\ -g \\ \ddot{d}_2 - \dot{\theta}_1^2 d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_1 d_2 m_2 - 2\dot{\theta}_1 \dot{d}_2 m_2 \\ -g m_2 \\ \ddot{d}_2 m_2 - \dot{\theta}_1^2 d_2 m_2 \end{bmatrix}$$

$${}^1f_1 = {}^1R_2 {}^2f_2 + m_1 {}^1a_1 \quad \text{Ec. 4.11}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_1 d_2 m_2 - 2\dot{\theta}_1 \dot{d}_2 m_2 \\ -g m_2 \\ \ddot{d}_2 m_2 - \dot{\theta}_1^2 d_2 m_2 \end{bmatrix} + m_1 \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_1 L_1 \\ -g \\ -\dot{\theta}_1^2 L_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_1 d_2 m_2 - 2\dot{\theta}_1 \dot{d}_2 m_2 - \ddot{\theta}_1 L_1 m_1 \\ -g(m_2 + m_1) \\ \ddot{d}_2 m_2 - \dot{\theta}_1^2 d_2 m_2 - \dot{\theta}_1^2 L_1 m_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ahora se puede calcular el par motor ejercido en los actuadores 1 y 2. A partir de este punto, se considerarán las dos variaciones de la matriz de inercia, ya que para calcular el par motor es necesario vincular la matriz de inercia, y para este caso particular se va a estudiar los resultados con una matriz de inercia diagonal y con una matriz de inercia completa.

3.2.1 Modelo dinámico con matriz de inercia diagonal

La ecuación para calcular el par con la matriz de inercia ${}^1I_{ia}$ es:

$${}^2n_1 = {}^2R_3 [{}^3n_3 + ({}^3R_2 {}^2p_2) \times {}^3f_3] + ({}^2p_2 + {}^2s_2) \times m_2 {}^2a_2 + {}^2I_{2a} {}^2\dot{\omega}_2 + {}^2\omega_2 \times ({}^2I_{2a} \cdot {}^2\omega_2) \quad \text{Ec. 4.12}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \times m_2 \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_1 d_2 - 2\dot{\theta}_1 \dot{d}_2 \\ -g \\ \ddot{d}_2 - \dot{\theta}_1^2 d_2 \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} I_{xx2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -\ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} I_{xx2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} d_2 m_2 g \\ -I_{yy2} \ddot{\theta}_1 - d_2 m_2 (\ddot{\theta}_1 d_2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{d}_2) \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$${}^1n_1 = {}^1R_2 [{}^2n_2 + ({}^2R_1 {}^1p_1) \times {}^2f_2] + ({}^1p_1 + {}^1s_1) \times m_1 {}^1a_1 + {}^1I_{1a} {}^1\dot{\omega}_1 + {}^1\omega_1 \times ({}^1I_{1a} \cdot {}^1\omega_1) \quad \text{Ec. 4.13}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} d_2 m_2 g \\ -I_{yy} \ddot{\theta}_1 - d_2 m_2 (\ddot{\theta}_1 d_2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{d}_2) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_1 d_2 m_2 - 2\dot{\theta}_1 \dot{d}_2 m_2 \\ -g m_2 \\ \ddot{d}_2 m_2 - \dot{\theta}_1^2 d_2 m_2 \end{bmatrix} \right) + \\ &+ \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L_1 \end{bmatrix} \right) \times \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_1 L_1 m_1 \\ -g m_1 \\ -\dot{\theta}_1^2 L_1 m_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{xx1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -\ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \\ &\times \left(\begin{bmatrix} I_{xx1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \\ &= \begin{bmatrix} L_1 m_1 g + d_2 m_2 g \\ -m_1 \ddot{\theta}_1 L_1^2 - 2I_{yy1} \ddot{\theta}_1 - d_2 m_2 (\ddot{\theta}_1 d_2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{d}_2) \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ahora se procede con la determinación de la fuerza o par motor aplicado a la articulación 1 y 2.

- Para la articulación 2 se calcula la fuerza ya que es un eslabón de traslación, por lo que la ecuación es la siguiente:

$$F_2 = {}^2f_2^T {}^2R_1 z_0 \quad \text{Ec. 4.14}$$

$$= \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_1 d_2 m_2 - 2\dot{\theta}_1 \dot{d}_2 m_2 \\ -g m_2 \\ \ddot{d}_2 m_2 - \dot{\theta}_1^2 d_2 m_2 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \ddot{d}_2 m_2 - \dot{\theta}_1^2 d_2 m_2$$

- Para la articulación 1 se calcula el par ya que es un eslabón de rotación, por lo tanto la ecuación a utilizar es:

$$\begin{aligned} T_1 &= {}^1n_1^T {}^1R_0 z_0 \quad \text{Ec. 4.15} \\ &= \begin{bmatrix} L_1 m_1 g + d_2 m_2 g \\ -m_1 \ddot{\theta}_1 L_1^2 - 2I_{yy1} \ddot{\theta}_1 - d_2 m_2 (\ddot{\theta}_1 d_2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{d}_2) \\ 0 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= m_1 \ddot{\theta}_1 L_1^2 + 2I_{yy1} \ddot{\theta}_1 + d_2 m_2 (\ddot{\theta}_1 d_2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{d}_2) \end{aligned}$$

Por lo tanto, las ecuaciones que componen el modelo dinámico utilizando una matriz de inercia diagonal, son:

$$T_1 = m_1 \ddot{\theta}_1 L_1^2 + 2I_{yy1} \ddot{\theta}_1 + d_2 m_2 (\ddot{\theta}_1 d_2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{d}_2) \quad \text{Ec. 4.16}$$

$$F_2 = \ddot{d}_2 m_2 - \dot{\theta}_1^2 d_2 m_2 \quad \text{Ec. 4.17}$$

3.2.2 Modelo dinámico con matriz de inercia completa

La expresión para hallar el par motor con la matriz de inercia ${}^iI_{ib}$ es:

$${}^2n_1 = {}^2R_3 [{}^3n_3 + ({}^3R_2 {}^2p_2) \times {}^3f_3] + ({}^2p_2 + {}^2s_2) \times m_2 {}^2a_2 + {}^2I_{2b} {}^2\dot{\omega}_2 + {}^2\omega_2 \times ({}^2I_{2b} \cdot {}^2\omega_2) \quad \text{Ec. 4.18}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \times m_2 \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_1 d_2 - 2\dot{\theta}_1 \dot{d}_2 \\ -g \\ \ddot{d}_2 - \dot{\theta}_1^2 d_2 \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} I_{xx2} & I_{xy2} & I_{xz2} \\ I_{yx2} & I_{yy2} & I_{yz2} \\ I_{zx2} & I_{zy2} & I_{zz2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -\ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} I_{xx2} & I_{xy2} & I_{xz2} \\ I_{yx2} & I_{yy2} & I_{yz2} \\ I_{zx2} & I_{zy2} & I_{zz2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} d_2 m_2 g + I_{zy2} \dot{\theta}_1^2 - I_{xy2} \ddot{\theta}_1 \\ -I_{yy2} \ddot{\theta}_1 - d_2 m_2 (\ddot{\theta}_1 d_2 + 2 \dot{\theta}_1 \dot{d}_2) \\ -I_{xy2} \dot{\theta}_1^2 - I_{zy2} \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

$${}^1n_1 = {}^1R_2[{}^2n_2 + ({}^2R_1{}^1p_1) \times {}^2f_2] + ({}^1p_1 + {}^1s_1) \times m_1 {}^1a_1 + {}^1I_{1b}{}^1\dot{\omega}_1 + {}^1\omega_1 \times ({}^1I_{1b} \cdot {}^1\omega_1) \quad \text{Ec. 4.19}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} d_2 m_2 g \\ -I_{yy} \ddot{\theta}_1 - d_2 m_2 (\ddot{\theta}_1 d_2 + 2 \dot{\theta}_1 \dot{d}_2) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_1 d_2 m_2 - 2 \dot{\theta}_1 \dot{d}_2 m_2 \\ -g m_2 \\ \ddot{d}_2 m_2 - \dot{\theta}_1^2 d_2 m_2 \end{bmatrix} \right) + \\ &\quad + \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L_1 \end{bmatrix} \right) \times \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_1 L_1 m_1 \\ -g m_1 \\ -\dot{\theta}_1^2 L_1 m_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{xx1} & I_{xy1} & I_{xz1} \\ I_{yx1} & I_{yy1} & I_{yz1} \\ I_{zx1} & I_{zy1} & I_{zz1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -\ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \\ &\quad + \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} L_1 m_1 g + d_2 m_2 g + 2(I_{zy1} \dot{\theta}_1^2 - I_{xy1} \ddot{\theta}_1) \\ -m_1 \ddot{\theta}_1 L_1^2 - 2I_{yy1} \ddot{\theta}_1 - d_2 m_2 (\ddot{\theta}_1 d_2 + 2 \dot{\theta}_1 \dot{d}_2) \\ -2(I_{xy1} \dot{\theta}_1^2 + I_{zy1} \ddot{\theta}_1) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ahora se procede a determinar la fuerza o par motor aplicado a la articulación 1 y 2.

- Para la articulación 2 se calcula la fuerza ya que es un eslabón de traslación, por lo que la ecuación es la siguiente:

$$F_2 = {}^2f_2 {}^T {}^2R_1 z_0 \quad \text{Ec. 4.20}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_1 d_2 m_2 - 2 \dot{\theta}_1 \dot{d}_2 m_2 \\ -g m_2 \\ \ddot{d}_2 m_2 - \dot{\theta}_1^2 d_2 m_2 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \ddot{d}_2 m_2 - \dot{\theta}_1^2 d_2 m_2 \end{aligned}$$

- Para la articulación 1 se calcula el par ya que es un eslabón de rotación, por lo tanto la ecuación a utilizar es:

$$T_1 = {}^1n_1 {}^T {}^1R_0 z_0 \quad \text{Ec. 4.21}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} L_1 m_1 g + d_2 m_2 g + 2(I_{zy1} \dot{\theta}_1^2 - I_{xy1} \ddot{\theta}_1) \\ -m_1 \ddot{\theta}_1 L_1^2 - 2I_{yy1} \ddot{\theta}_1 - d_2 m_2 (\ddot{\theta}_1 d_2 + 2 \dot{\theta}_1 \dot{d}_2) \\ -2(I_{xy1} \dot{\theta}_1^2 + I_{zy1} \ddot{\theta}_1) \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= m_1 \ddot{\theta}_1 L_1^2 + 2I_{yy1} \ddot{\theta}_1 + d_2 m_2 (\ddot{\theta}_1 d_2 + 2 \dot{\theta}_1 \dot{d}_2) \end{aligned}$$

Por lo tanto, las ecuaciones que componen el modelo dinámico utilizando una matriz de inercia diagonal, son:

$$T_1 = m_1 \ddot{\theta}_1 L_1^2 + 2I_{yy1} \ddot{\theta}_1 + d_2 m_2 (\ddot{\theta}_1 d_2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{d}_2) \quad \text{Ec. 4.22}$$

$$F_2 = \ddot{d}_2 m_2 - \dot{\theta}_1^2 d_2 m_2 \quad \text{Ec. 4.23}$$

CAPÍTULO 5

CONTROL CINEMÁTICO DEL MANIPULADOR

5.1 INTRODUCCIÓN

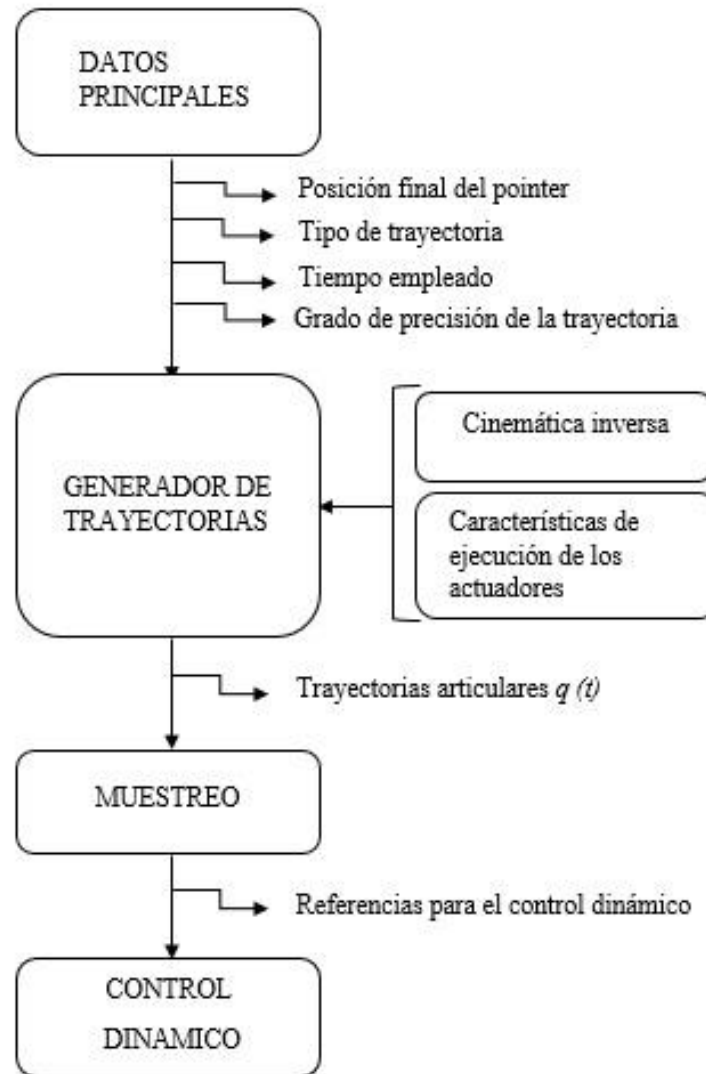
En el siguiente capítulo se planteará el control cinemático del manipulador, con el cual se podrá establecer las trayectorias articulares que debe seguir los elementos de entrada del manipulador para cumplir con las ordenes creadas por el usuario (punto de destino, trayectoria cartesiana, tiempo empleado, entre otros). Primeramente, se establece el funcionamiento del control cinemático del manipulador teniendo en cuenta los objetivos fijados por el usuario, utilizando como referencia el modelo cinemático del manipulador con la intención de establecer las trayectorias articulares para cada par activo del robot.

A continuación, se enumeran las diferentes funciones que pueden ser contempladas en el manipulador. Seguidamente, se expondrán los interpoladores con los que se pretende trabajar en el control cinemático del manipulador, considerando las condiciones de posición y tiempo de los actuadores, así como las condiciones de frontera que están relacionadas a con los valores máximos permisibles para las velocidades y aceleraciones de los actuadores. Por último, se presentará una pequeña descripción del diseño del prototipo en SolidWorks y se mostrará el comportamiento de la posición angular del par rotativo y la posición lineal obtenida por el pointer, así como los pares y fuerzas motoras requeridas por los actuadores.

5.2 FASES DEL CONTROL CINEMÁTICO

Las fases para desarrollar el control cinemático se muestran en la figura 10.

Figura 10. Esquema de control cinemático



Fuente: Adaptado de (Barrientos, Peñin, Balaguer & Aracil, 1997)

En primer lugar, es necesario conocer los valores iniciales establecidos por el usuario para el sistema, por ejemplo la posición inicial, la trayectoria que se desea trazar, la posición final y el tiempo empleado por el manipulador para realizar todo su desplazamiento. Este grupo de características del manipulador se cambiarán en una trayectoria analítica dentro del espacio cartesiano (evolución de cada coordenada cartesiana en función del tiempo). A partir de estos datos se realiza un muestreo obteniendo un número finito de puntos de la trayectoria que estarán conformados por dos coordenadas de posición respecto al marco de referencia OXY .

Estos datos calculados durante el muestreo son fundamentales para el control cinemático, ya que al utilizar la cinemática inversa del manipulador, se efectuará un método de transformación de coordenadas cartesianas del sistema a datos de posición de las coordenadas generalizadas q_A , q_B . Además, se debe considerar que, para asegurar la continuidad de la trayectoria efectuada por el pointer, en la solución obtenida para cada coordenada generalizada, no existan datos que deriven en posiciones singulares del manipulador. Para el conjunto de puntos de solución calculados en cada una de las coordenadas generalizadas se derivan mediante técnicas de interpolación para determinar las funciones $q_A(t)$, $q_B(t)$ que sean efectuadas por los actuadores y que permitan al pointer lograr de una manera aproximada la función cartesiana definida inicialmente.

Para finalizar el proceso relacionado al control cinemático, se realiza un nuevo procedimiento de muestreo en las funciones $q_A(t)$, $q_B(t)$ que se utilizaría como referencia para el control dinámico del manipulador.

5.3 TIPOS DE TRAYECTORIAS

El objetivo de los manipuladores es desarrollar un conjunto de tareas dentro del espacio de trabajo para desplazarse desde un punto inicial hasta un punto final, estos puntos pueden ser relacionados mediante diferentes trayectorias. En este proyecto se trabajará con las trayectorias construidas punto a punto y con las trayectorias continuas. (Barrientos et al., 1997; Siciliano et al., 2009).

5.3.1 Trayectorias punto a punto

Este tipo de trayectorias contempla que los actuadores pretenden pasar desde el punto inicial hasta su punto final en el menor tiempo posible sin tener en cuenta las alteraciones presentes en los otros actuadores. Con base en este comportamiento se pueden identificar dos casos: a) movimiento eje a eje y b) movimiento simultáneo de ejes.

En el movimiento eje a eje solo se produce un movimiento de un eje cada vez. Empezará a moverse uno de los actuadores y cuando este termine de desarrollar su trayectoria se activará el segundo actuador, esto lo hará continuamente dependiendo del número de actuadores del manipulador. Como resultado de este movimiento se presenta un bajo consumo de potencia instantánea por parte de los actuadores, sin embargo, el tiempo empleado para desarrollar una tarea es muy alto a comparación de otras trayectorias.

En el movimiento simultáneo de ejes, al principio todos los actuadores empiezan simultáneamente con una velocidad programada. Teniendo en cuenta que las distancias que deben desplazarse los actuadores son diferentes, cada actuador alcanzará el punto de destino en un tiempo diferente. Por lo tanto, el tiempo total que emplea el manipulador para desarrollar su tarea será el tiempo del actuador más lento.

5.3.2 Trayectorias continuas

Cuando se solicita que el movimiento del manipulador, este definido por una función conocida por el usuario, se debe determinar las trayectorias articulares de forma continua. El resultado de este procedimiento es la obtención de trayectorias articulares con un comportamiento independiente de los demás actuadores, ya que estos contarán con continuos cambios de dirección y velocidad. A pesar de ello, el resultado conjunto producirá que el manipulador realice la trayectoria esperada.

5.4 TÉCNICAS DE INTERPOLACIÓN

Una de las intenciones del control cinemático es enlazar un conjunto de puntos en el espacio articular, con el objetivo de que el actuador lo logre en un tiempo determinado. Para conseguir este objetivo se deben seleccionar funciones de interpolación que tengan en cuenta las diferentes condiciones de frontera requeridas en el espacio articular: a) posiciones, b) velocidades y c) aceleraciones máximas. Actualmente se encuentran diferentes posibilidades para escoger las técnicas de interpolación. No obstante, en este trabajo se utilizarán las técnicas de Splines Cubicas (Biagiotti & Melchiorri, 2008; Hoffman & Sauer, 2004), Splines Akima (Akima, 1969) y la interpolación lineal (Reyes Cortes, 2011; Craig, 2011). A continuación, se hará una breve explicación de su funcionamiento.

5.4.1. Interpoladores lineales

Si se desea que uno de los actuadores q del manipulador se traslade continuamente de un dato q^i en el tiempo t^i . Una posible solución se basaría en dejar constante la velocidad de movimiento entre cada dos valores consecutivos (q^{i-1} , q^i) del actuador.

La trayectoria entre dos puntos q^{i-1} , q^i sería:

$$q(t) = (q^i - q^{i-1}) * \frac{t - t^{i-1}}{T} + q^{i-1} \quad t^{i-1} < t < t^i \quad \text{Ec. 5.1}$$

$$T = t^i - t^{i-1} \quad \text{Ec. 5.2}$$

Este tipo de trayectoria garantiza la continuidad de la posición, sin embargo causa saltos bruscos en la velocidad \dot{q} del actuador e igualmente precisa de aceleraciones \ddot{q} de valor infinito, algo que no es posible de aplicar.

5.4.2. Interpolador Cubico

Para garantizar que la trayectoria que une los puntos por los que debe pasar los actuadores considerando una continuidad en velocidad, se puede utilizar un polinomio grado tres que acople cada pareja de puntos adyacentes. De esta forma si se tienen cuatro parámetro

disponibles se podrá imponer cuatros condiciones de frontera, dos de posición y dos de velocidad.

Se logra así una trayectoria compuesta por una serie de polinomios cúbicos, valido entre dos puntos consecutivos. Este grupo de polinomios relacionados, seleccionados de manera que se garantice continuidad entre posición y velocidad, esto se denomina Spines. La expresión de la trayectoria que une dos puntos adyacentes (q^{i-1} , q^i) será (Dyllong & Visioli, 2003):

$$q(t) = a + b * (t - t^{i-1}) + c(t - t^{i-1})^2 + d(t - t^{i-1})^3 \quad t^{i-1} < t < t^i$$

$$\begin{aligned} a &= q^{i-1} \\ b &= \dot{q}^{i-1} \end{aligned} \quad \text{Ec. 5.3}$$

$$c = \frac{3}{T^2}(q^i - q^{i-1}) - \frac{2}{T^2}\dot{q}^{i-1} - \frac{1}{T^2}\dot{q}^i \quad \text{Ec. 5.4}$$

$$d = -\frac{2}{T^3}(q^i - q^{i-1}) + \frac{1}{T^2}(\dot{q}^{i-1} + \dot{q}^i) \quad \text{Ec. 5.5}$$

$$T = t^i - t^{i-1} \quad \text{Ec. 5.6}$$

Para poder obtener los coeficientes del polinomio cubico es necesario conocer los datos de las velocidades de paso \dot{q}^i . Hay diferentes posibilidades para seleccionar las velocidades de paso, una podría ser:

$$\dot{q}^i = \begin{cases} 0, & \text{Si } \text{signo}(q^i - q^{i-1}) \neq \text{signo}(q^{i+1} - q^i) \\ \frac{1}{2} \left[\frac{q^{i+1} - q^i}{t^{i+1} - t^i} + \frac{q^i - q^{i-1}}{t^i - t^{i-1}} \right], & \text{Si } \text{signo}(q^i - q^{i-1}) = \text{signo}(q^{i+1} - q^i) \end{cases} \quad \text{Ec. 5.7}$$

Esta elección es fácil de ejecutar y da como resultado una continuidad razonable en la velocidad. No obstante, no impone ninguna condición sobre la continuidad de la aceleración.

Otra posibilidad es seleccionar las velocidades de paso de manera que cada Spline cúbico sea continuo en posición, velocidad y aceleración con los dos polinomios adyacentes. De manera que los coeficientes de los k-1 polinomios de tipo Spline cúbico que pasan por los puntos q^i ($i \in [1, k]$), garanticen la continuidad en posición, velocidad y aceleración de la trayectoria global, serán los calculados por la expresión 5.8, en el cual las velocidades de paso por los puntos se obtiene de resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales de diagonal dominante.

$$\begin{bmatrix} t^3 & 2(t^2 + t^3) & t^2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & t^4 & 2(t^3 + t^4) & t^3 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & t^5 & 2(t^4 + t^5) & t^4 & \dots \\ \dots & \dots & 0 & t^6 & \dots & \dots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}^1 \\ \dot{q}^2 \\ \dot{q}^3 \\ \vdots \\ \dot{q}^k \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{t^2 t^3} [(t^2)^2 (q^3 - q^2) + (t^3)^2 (q^2 - q^1)] \\ \frac{3}{t^3 t^4} [(t^3)^2 (q^4 - q^3) + (t^4)^2 (q^3 - q^2)] \\ \vdots \\ \frac{3}{t^{k-1} t^k} [(t^{k-1})^2 (q^k - q^{k-1}) + (t^k)^2 (q^{k-1} - q^{k-2})] \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 5.8}$$

Se puede observar que el sistema tiene k-2 ecuaciones y k incógnitas, que son las distintas velocidades de paso por los k puntos. Para completar el número de ecuaciones de forma que el sistema esté definido, se pueden añadir las siguientes condiciones:

$$\dot{q}^1 = \dot{q}^k = 0$$

Por lo tanto, la articulación parte y llega a un estado de reposo. Por lo que las k ecuaciones lineales definidas anteriormente permiten obtener las k velocidades de paso necesarias para poder utilizar la expresión de los Spline cúbicos, asegurando la continuidad hasta la segunda derivada de la trayectoria global.

5.4.3. Interpolador Spline Akima

El procedimiento de interpolación Akima se encuentra dentro del conjunto de interpoladores cúbicos, sin embargo, esta metodología necesita información sobre los puntos adyacentes al intervalo de interpolación. De forma que cada punto de datos en una Spline Akima actúa solo al fragmento contiguo a la curva. Una interpolación Spline Akima se realiza de forma muy rápida ya que utiliza un procedimiento concreto. Para realizar el método matemáticamente es necesario seleccionar cinco puntos que ayuden a determinar la pendiente de la curva así como estimar otros puntos del sistema. Por lo tanto, se debe seleccionar un punto intermedio y dos puntos adyacentes a cada extremo de este. De manera que la pendiente de la curva se pueda determinar mediante la siguiente ecuación (Akima, 1969):

$$t = \frac{|m_4 - m_3|m_2 + |m_2 - m_1|m_3}{|m_4 - m_3| + |m_2 - m_1|} \quad \text{Ec. 5.9}$$

Donde m_1, m_2, m_3 y m_4 son la pendiente de los segmentos $\overline{12}$, $\overline{23}$, $\overline{34}$ y $\overline{45}$, respectivamente. Bajo esta condición, la pendiente t de la curva en el punto tres solo depende de las pendientes de cuatro segmentos y es independiente de la amplitud del intervalo. Con la condición se

debe cumplir que $t = m_2$ cuando $m_1 = m_2$ y $m_3 \neq m_4$; y $t = m_3$ cuando $m_3 = m_4$ y $m_1 \neq m_2$. Este procedimiento también se cumple si $m_2 = m_3$ con $t = m_2 = m_3$.

Por otro lado, cuando $m_1 = m_2 \neq m_3 = m_4$, la pendiente t es indefinida ya que puede tener diferentes valores entre m_2 y m_3 cuando m_1 se aproxime a m_2 y m_4 se aproxime a m_3 simultáneamente. Esto es de suma importancia ya que no se puede determinar la curva con esta condición.

Para determinar un segmento de la curva es necesario seleccionar dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) , además de las pendientes entre los dos puntos (Akima, 1969):

$$\begin{array}{lll} y = y_1 & \frac{dy}{dx} = t_1 & x = x_1 \\ y = y_2 & \frac{dy}{dx} = t_2 & x = x_2 \end{array}$$

A partir de estos puntos la curva se puede expresar como un polinomio de tercer grado de muchas maneras una de ellas es (Akima, 1969):

$$y = p_0 + p_1(x - x_1) + p_2(x - x_1)^2 + p_3(x - x_1)^3 \quad \text{Ec. 5.10}$$

$$p_0 = y_1 \quad \text{Ec. 5.11}$$

$$p_1 = t_1 \quad \text{Ec. 5.12}$$

$$p_2 = \frac{\left[\frac{3(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} - 2t_1 - t_2 \right]}{x_2 - x_1} \quad \text{Ec. 5.13}$$

$$p_3 = \frac{\left[t_1 + t_2 - \frac{2(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} \right]}{(x_2 - x_1)^2} \quad \text{Ec. 5.14}$$

Por último, si se desea interpolar dos o más puntos y un punto final, se debe asumir un punto final (x_3, y_3) y dos puntos dados que sean adyacentes (x_2, y_2) y (x_1, y_1) , junto con otros dos puntos que serán calculados (x_4, y_4) y (x_5, y_5) , entonces la ecuación de la curva esta expresada por (Akima, 1969):

$$y = g_0 + g_1(x - x_3) + g_2(x - x_3)^2 \quad \text{Ec. 5.15}$$

Donde g son constantes, asumiendo que:

$$x_5 - x_3 = x_4 - x_2 = x_3 - x_1 \quad \text{Ec. 5.16}$$

Se puede determinar y_4 y y_5 , correspondientes a x_4 y x_5 , respectivamente de la ecuación 5.15. Los resultados son:

$$\begin{aligned} \frac{y_5 - y_4}{x_5 - x_4} - \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} &= \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} - \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} \\ \frac{y_5 - y_4}{x_5 - x_4} - \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} &= \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \end{aligned} \quad \text{Ec. 5.17}$$

Este tipo de metodología genera buenos resultados para el valor de la función de aproximación. Adicionalmente, entrega cálculos óptimos para la primera derivada de la función cuando los puntos de datos se encuentran separados de forma homogénea. Por el contrario, si los puntos no se encuentran separados de forma homogénea, es posible que se presenten errores en la primera derivada. Pese a que la primera derivada puede arrojar óptimos datos, la segunda derivada de la función de aproximación no es eficaz cuando se utiliza este procedimiento.

Cabe destacar que cuando se utilizan funciones con porciones lineales o que presenten cambios abruptos en la curva la Spline Akima presenta menos rugosidad que una Spline cúbica, por lo que es más fácil de cambiar de forma.

5.5 PRUEBAS EN EL PROTOTIPO DEL MANIPULADOR

5.5.1 Control cinemático y estudio de posición del manipulador

Mediante la cinemática inversa del manipulador, se puede hallar la posición para cada actuador, esto posibilita la obtención de un conjunto de puntos que hacen parte de una trayectoria establecida por el usuario, con respecto a un marco de referencia fijo previamente establecido OXY . A partir de esta premisa, se realizó un análisis con un algoritmo que ayudo a comprobar y validar diversas características y condiciones del comportamiento del manipulador. Por lo tanto, se van a estudiar los movimientos de los actuadores que generarán en el pointer el cambio de posición de acuerdo con la trayectoria definida dentro del espacio de trabajo.

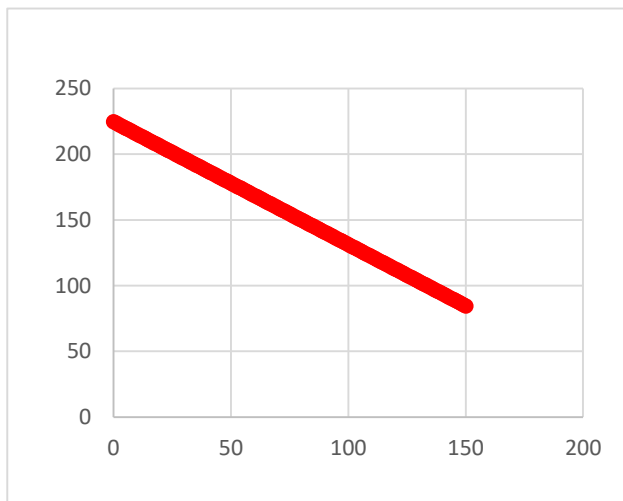
El procedimiento que se llevó a cabo es el siguiente: a) se realizaron diferentes tipos de geometrías simples (como una línea oblicua, un triángulo rectángulo y una circunferencia) dentro del espacio de trabajo del manipulador; b) la posición de cada geometría era conocida por el usuario y estaban establecidos dentro del marco de referencia OXY ; c) a partir de estos datos se realizó la cinemática inversa para calcular el ángulo de desplazamiento del soporte y la distancia desde el origen O hasta el punto final del pointer.

En el programa SolidWorks se dibujaron dichas geometrías y se realizaba una simulación con el fin de que el manipulador desarrollará una trayectoria a lo largo de la geometría, luego

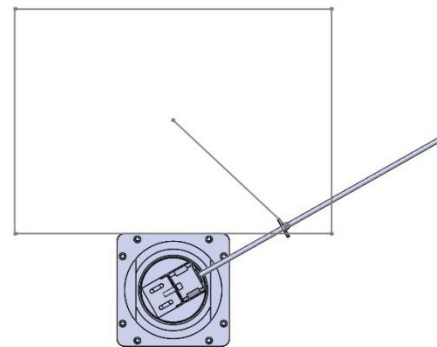
mediante las funciones de interpolación (Spline Akima y Spline cúbica) se obtuvieron los datos tanto para el ángulo del soporte como la distancia alcanzada por el pointer. Todos estos datos estaban en función del tiempo que empleaba el manipulador en realizar la trayectoria. A partir de estos datos hallados mediante el programa y con los valores calculados mediante la cinemática inversa se realizaron cuatro graficas que permiten validar tanto el comportamiento de cada actuador como el correcto desplazamiento del pointer a lo largo del espacio de trabajo.

A continuación, se mostrarán las gráficas obtenidas mediante SolidWorks y las gráficas obtenidas mediante la cinemática inversa para cada una de las geometrías.

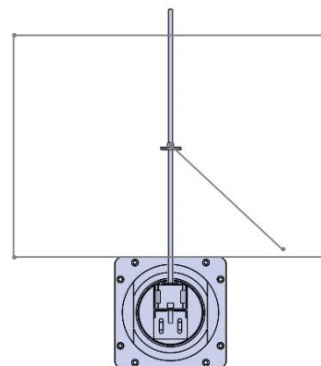
Figura 11. Representación línea oblicua en Excel y SolidWorks



Grafica teórica



a) Posición inicial



b) Posición final

Figura 12. Funciones angular y de desplazamiento para la línea oblicua obtenida por la cinemática inversa

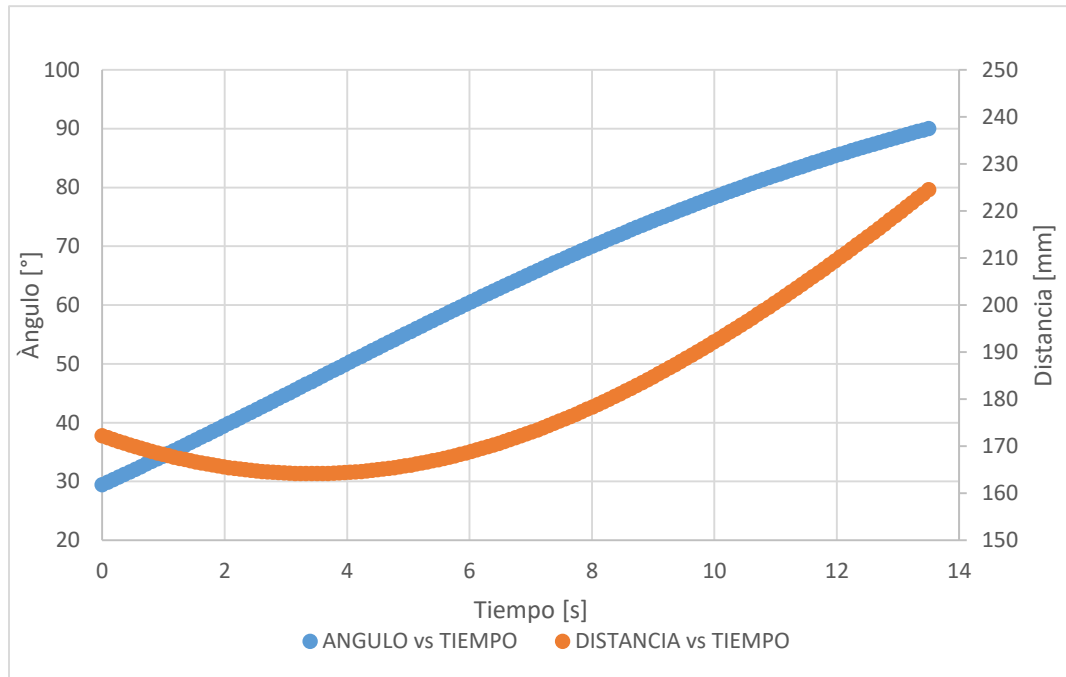


Figura 13. Función angular y de desplazamiento para la línea oblicua obtenida por SolidWorks

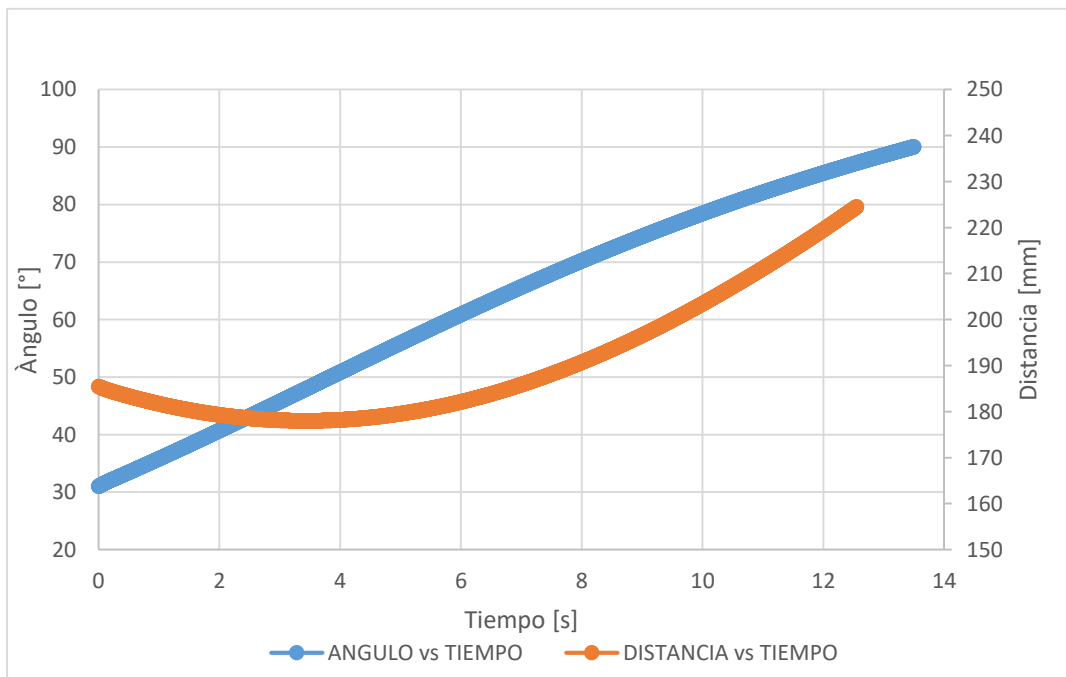
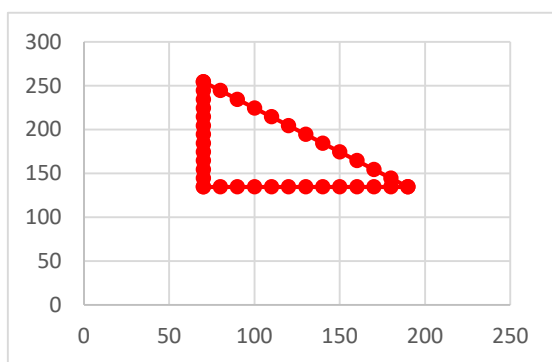
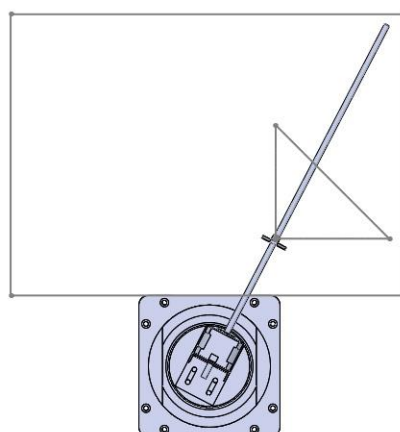


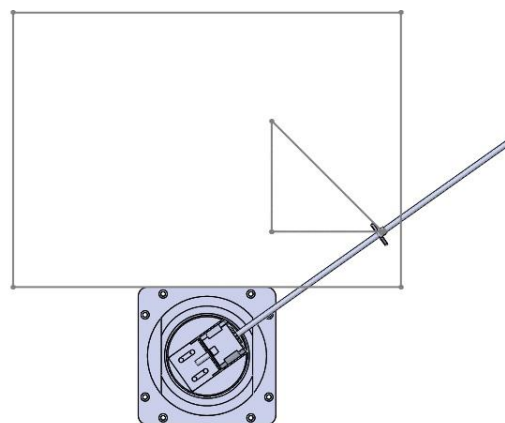
Figura 14. Representación triángulo rectángulo en Excel y SolidWorks



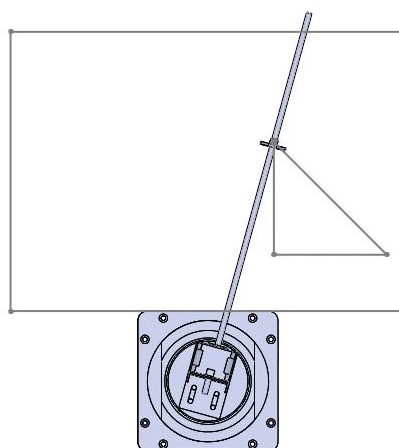
Grafica teórica



a) Posición vértice 1



b) Posición vértice 2



c) Posición vértice 3

Figura 15. Funciones angular y de desplazamiento para el triángulo rectángulo obtenida por la cinemática inversa

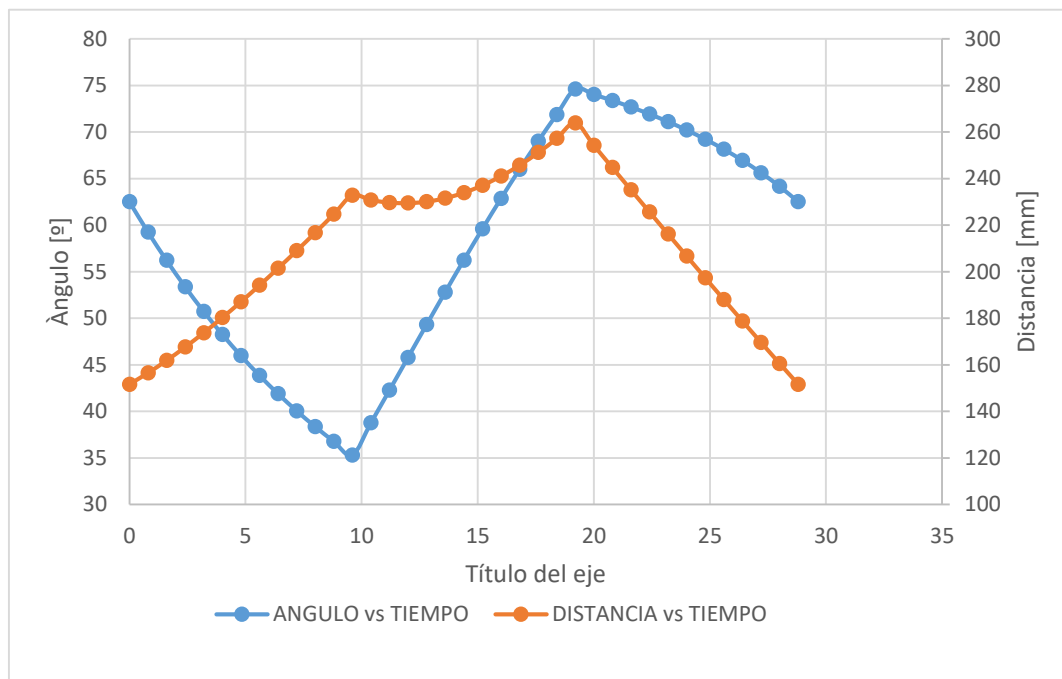


Figura 16. Función angular y de desplazamiento para el triángulo rectángulo obtenida por SolidWorks

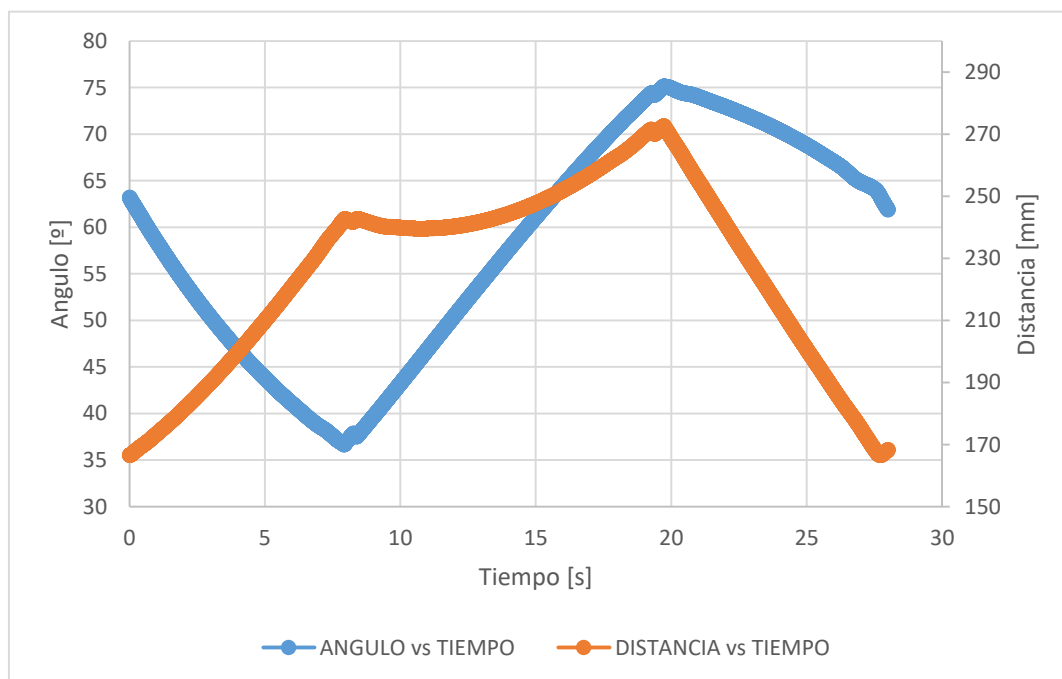
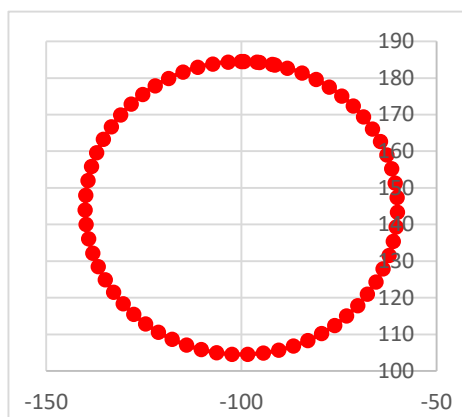
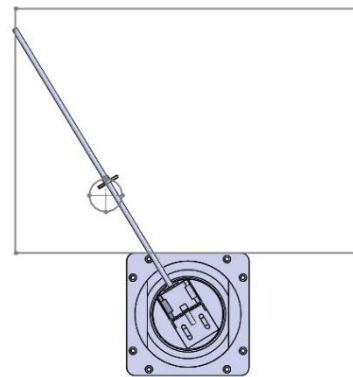


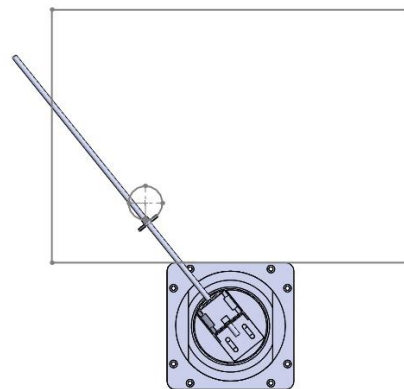
Figura 17. Representación circunferencia en Excel y SolidWorks



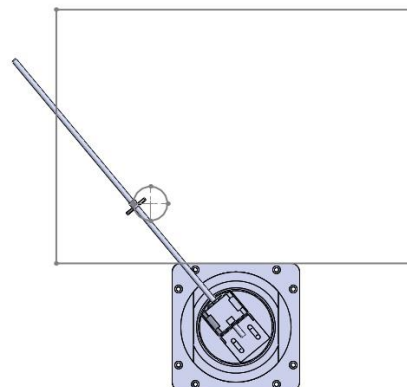
Grafica teórica



a) Posición inicial



b) Posición intermedia



c) Posición final

Figura 18. Funciones angular y de desplazamiento para la circunferencia obtenida por la cinemática inversa

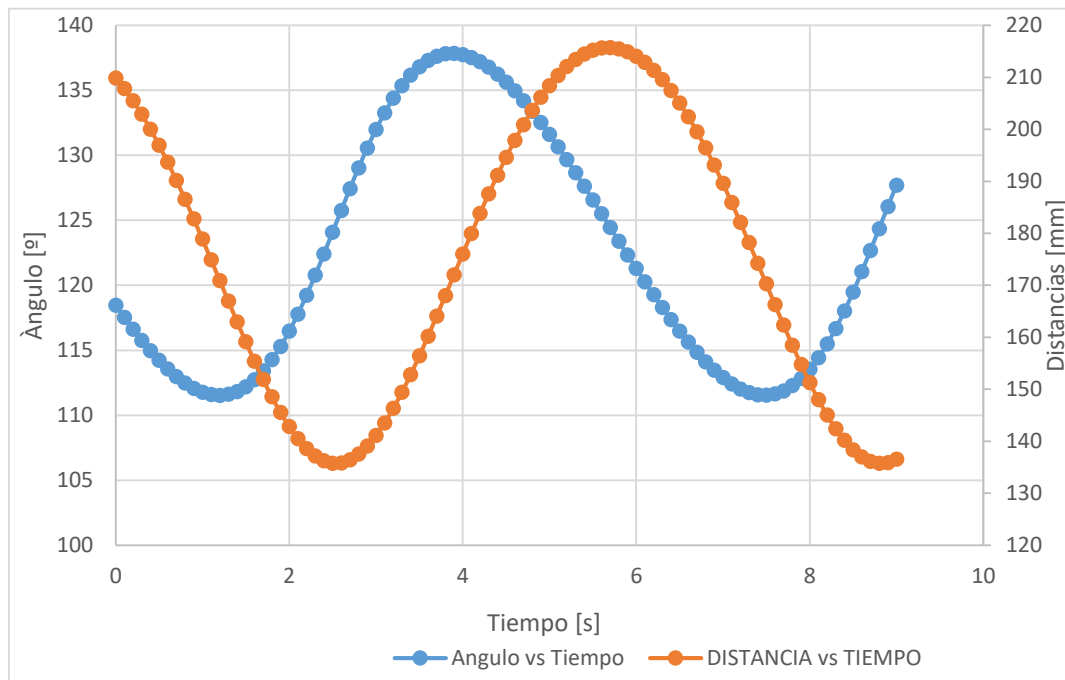
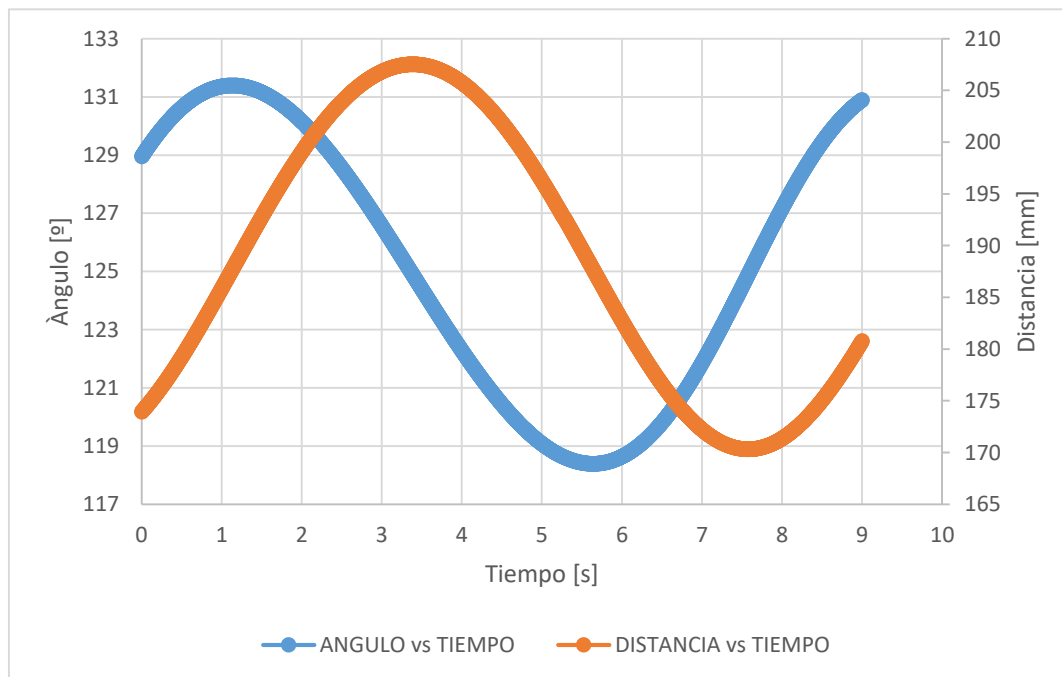


Figura 19. Función angular y de desplazamiento para la circunferencia obtenida por SolidWorks



Los resultados de las gráficas demuestran que las expresiones matemáticas utilizadas en la cinemática inversa para el control cinemático de posición del manipulador son correctas. Sin embargo, se hace indispensable explicar ciertos detalles que se reflejan en ellas.

- El comportamiento de las gráficas tanto para los datos calculados mediante la cinemática inversa como para los valores hallados utilizando el programa SolidWorks tienen un comportamiento y valores iguales en los tres casos expuestos. Esto muestra un buen comportamiento de las ecuaciones planteadas ya que estas geometrías se encuentran en diferentes posiciones del espacio de trabajo y también la fortaleza de la herramienta computacional.
- A pesar de que el comportamiento de las gráficas y que el desplazamiento angular es correcto, se presentan algunos desfases en el desplazamiento lineal, el más llamativo se encuentra en la geometría circular. Una posible causa de este desfase es la diferencia de datos que trabaja el programa en comparación con lo planteado en la cinemática inversa, ya que el programa trabaja con intervalos de tiempo y de distancia donde el tiempo de muestreo es dinámico y varía de acuerdo con el modelo dinámico del manipulador. Por esta razón los valores no varían en comparación con la gráfica de cinemática inversa.

Por último, se realizó una simulación para obtener datos de posición del pointer, velocidad lineal, aceleración lineal, velocidad angular y aceleración angular. Con el propósito de realizar el estudio de la dinámica inversa conducida cinemáticamente, y de esta forma determinar los valores del par motor y de la fuerza mínima necesaria para mover el prototipo del manipulador. Las gráficas obtenidas son las siguientes:

Figura 20. Gráfica de Fuerza vs Tiempo para la trayectoria circular

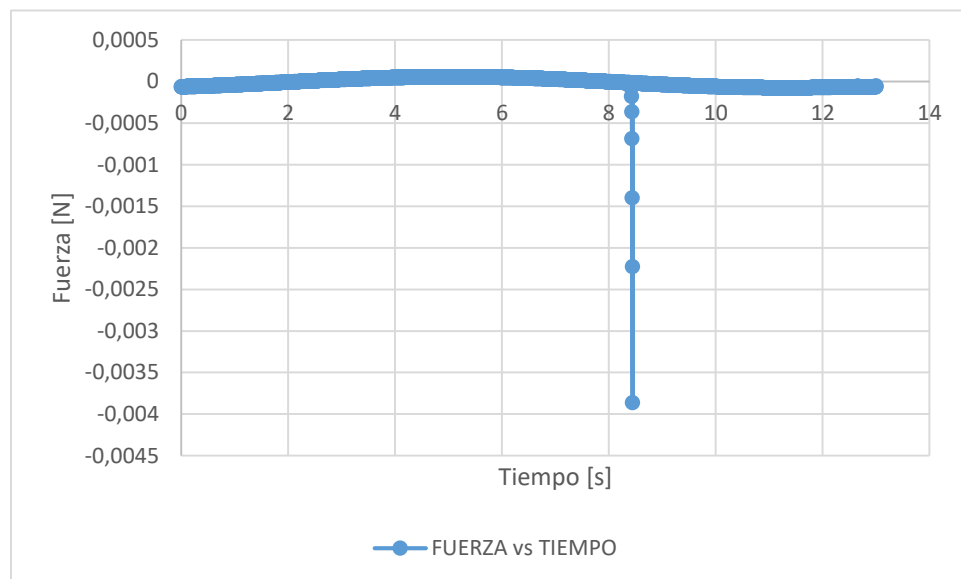
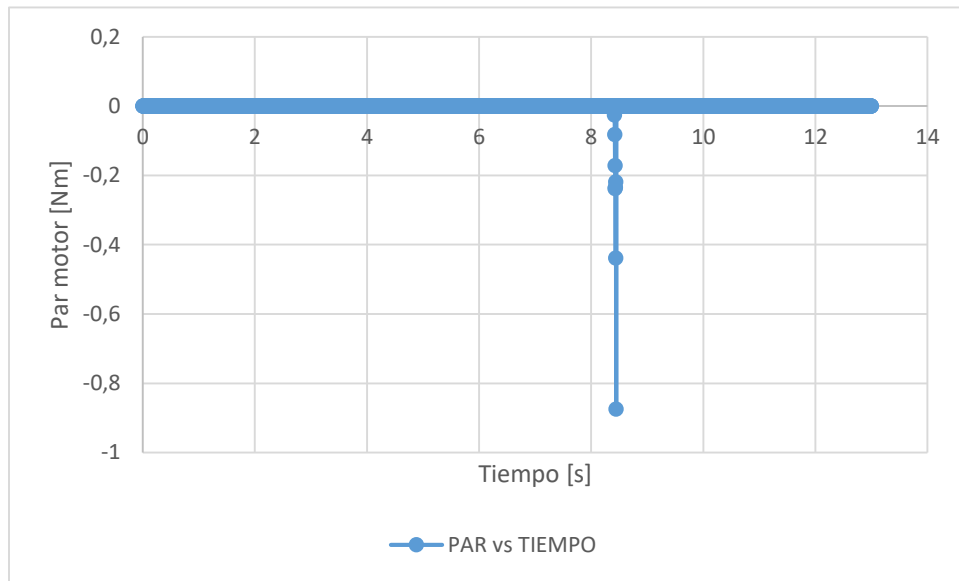


Figura 21. Grafica de Par motor vs Tiempo para la trayectoria circular



De acuerdo con los resultados producto del estudio, se puede decir que:

- Debido a las bajas velocidades con las que se realiza la operación se obtiene un comportamiento oscilatorio donde los valores son muy cercanos a cero tanto para el par motor como para la fuerza.
- En las gráficas se puede observar un pico en el instante de tiempo 8,444 segundos, cuando el pointer se encuentra 0,179 metros del origen. En ese instante se registra un cambio brusco tanto en la velocidad angular como en la aceleración angular, la velocidad angular alcanza 1,98 radianes por segundo, mientras que la aceleración alcanza 180,68 radianes por segundo al cuadrado. Estos datos son los valores máximos de velocidad y aceleración obtenidos, una posible causa de este comportamiento es que el manipulador realiza la trayectoria circular en sentido horario y justo después de realizar la mitad de la circunferencia necesita un aumento de en la aceleración para lograr terminar la trayectoria.

CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES, APORTES Y RECOMENDACIONES

6.1 CONCLUSIONES

Se logró diseñar un mecanismo que tuviera la estructura morfológica que se propuso desde el departamento de matemáticas del Miami Dade College, adicionalmente se seleccionó un espacio de trabajo acorde con las necesidades establecidas, y una posición del manipulador apropiado para que el manipulador pueda interactuar con el espacio de trabajo y generar diferentes trayectorias geométricas.

Se consiguió implementar el modelo cinemático directo e inverso del manipulador serial 1RP, el cual se pudo validar realizando diferentes actividades, primero validando posiciones de puntos mediante graficas en Excel y después realizando simulaciones con diferentes geometrías simples como trayectorias objetivo, y con la ayuda del programa computacional SolidWorks.

Se pudo definir el modelo dinámico del manipulador mediante la formulación de Newton Euler, este modelo dinámico se halló para dos configuraciones de momentos de inercia diferentes, tanto para una matriz de inercia diagonal como para una matriz de inercia completa. Estos modelos calculados serán de gran ayuda para los próximos proyectos del manipulador como en el proceso de diseño, como es la selección correcta de materiales para los componentes del manipulador, así como la posibilidad de poder implementar diferentes estrategias de control dinámico.

Se hizo posible el diseño y la implementación el control cinemático, gracias al programa computacional SolidWorks, además con este programa se pudo hacer el diseño virtual completo de cada una de las piezas y el ensamble del manipulador. Los resultados de la simulación fueron validadas, cumpliendo con los datos teóricos calculados. Adicionalmente se permitió observar el correcto comportamiento del manipulador realizando trayectorias de geometrías simples a lo largo de todo el espacio de trabajo.

6.2 APORTES

Se hizo el estudio cinemático del manipulador serial, donde se crearon ecuaciones que involucran condiciones cinemáticas del sistema con datos de posición, velocidad y aceleración.

Se realizó un diseño virtual del manipulador serial, como una propuesta inicial del prototipo del manipulador, eligiendo unas medidas adecuadas de cada pieza y seleccionando actuadores que cumplieran con un espacio de trabajo adecuado que permita realizar varias trayectorias dentro de él.

Se llevó a cabo un sistema de control cinemático, con el fin de que los actuadores hicieran un conjunto de movimientos para realizar trayectorias de geometrías simples dentro de un espacio de trabajo ya definido.

Se planteó el modelo dinámico del manipulador mediante la formulación Newton Euler, este procedimiento algebraico se realizó con la ayuda del software MATLAB, ya que esta formulación utiliza diferentes operaciones algebraicas que en algunos casos son extensas y complejas.

6.3 RECOMENDACIONES

Se recomienda hacer un diseño de un eje con rosca y prisionero para acoplar el eje del motor paso a paso con el eje que es solidario al soporte del actuador, esto con el fin de evitar el desgaste de la rosca y evitar que se generen holguras, ya que podría ocasionar una pérdida de precisión.

Con base al resultado del modelo dinámico del manipulador mediante la formulación de Newton Euler se recomienda utilizar la formulación Lagrange Euler para corroborar los resultados obtenidos y así explorar diferentes formulaciones que permitan verificar el modelo dinámico.

Es recomendable añadir un nuevo grado de libertad al manipulador que le otorgue un nuevo desplazamiento a la base o al pointer en el eje perpendicular al plano de trabajo. Esto evitaría el inconveniente de tener que tapar la punta del pointer o tener que quitarlo mientras el manipulador se desplaza hasta el punto inicial de una trayectoria.

Sería apropiado implementar un código de programación que contemple los modelos hallados para implementar una nueva estrategia de control que trabaje con retroalimentación visual, de esta manera el manipulador tendría la capacidad de generar diferentes trayectorias sin importar los objetos que se encuentren dentro del espacio de trabajo.

BIBLIOGRAFÍA

Akima, H., 1969, *A Method of Smooth Curve Fitting*, ESSA Tech. Rep. ERL 101-ITS 73 (1ra edición). Washington, D.C: Governement Printing Office.

Angulo. J.M, Romero. S, Martinez. I. (2005). *Introducción a la robótica, Principios teóricos, construcción y programación de un robot educativo*, Paraninfo (1ra Edición). España.

Barrientos, A., Peñin, L. F., Balaguer, C., & Aracil, R. (1996). *Fundamentos de Robótica*, Mc Graw Hill, Ed. (2da Edición). Madrid, España: Lavel, S.A.

Biagiotti, L., & Melchiorri, C. (2008). *Trajectory planning for automatic machines and robots. Trajectory Planning for Automatic Machines and Robots*, Springer (1ra Edición). Berlin Heidelberg.

Craig, John J. (2011). *Introduction to Robotics: Mechanics and Control*, Pearson (Prentice Hall) (3ra Edición).

Dyllong, E., & Visioli, A. (2003). Planning and real-time modifications of a trajectory using spline techniques. *Robotica*, 21(5), 475-482.

Hoffmann, W., & Sauer, T. (2004). A Spline Optimization Problem from Robotics. *Rendiconti Di Matematica*, 26(7), 221-230.

López-Cajún Carlos S., & Ceccarelli M. (2008). *Mecanismos: fundamentos cinemáticos para el diseño y optimización de maquinaria*, Editorial Trillas Sa de Cv (1ra Edición).

Martin George H. (2002). *Kinematics and Dynamics of Machines*, Waveland Pr Inc (2da Edición). Illinois, Chicago: Press Inc.

Norton Robert L. (2000). *Diseño de Maquinaria: síntesis y análisis de máquinas y mecanismos*, McGraw-Hill (2da Edición).

Rentería Arantxa, Rivas María. (2000). *Robótica industrial: fundamentos y aplicaciones*, McGraw-Hill (1ra Edición). Madrid, España.

Reyes Cortes, Fernando. (2011). *Robótica: control de robots manipuladores*, Marcombo, S.A. (1ra Edición).

Shigley, Josehp E & Uicker John J. (1993). *Teoría de Máquinas y Mecanismos*, McGraw-Hill (1ra Edición).

Siciliano, B., Sciavicco, L., Villani, L., & Oriolo, G. (2009). *Robotics: Modelling, Planning and Control*. (University of Strathclyde, Ed.), *Soft Computing*. London: Springer.

Tsai, Lung-Wen. (1999). *Robot Analysis: The mechanic of Serial and Parallel Manipulators*, John Wiley & Sons, Inc (1ra Edición). New York, NY.

Thompson (2002). *Catálogo de actuadores lineales*. Recuperado de: <https://www.thomsonlinear.com/es/product/MLN23A10-M10200P40600N-C8A0-XXX>

ANEXOS

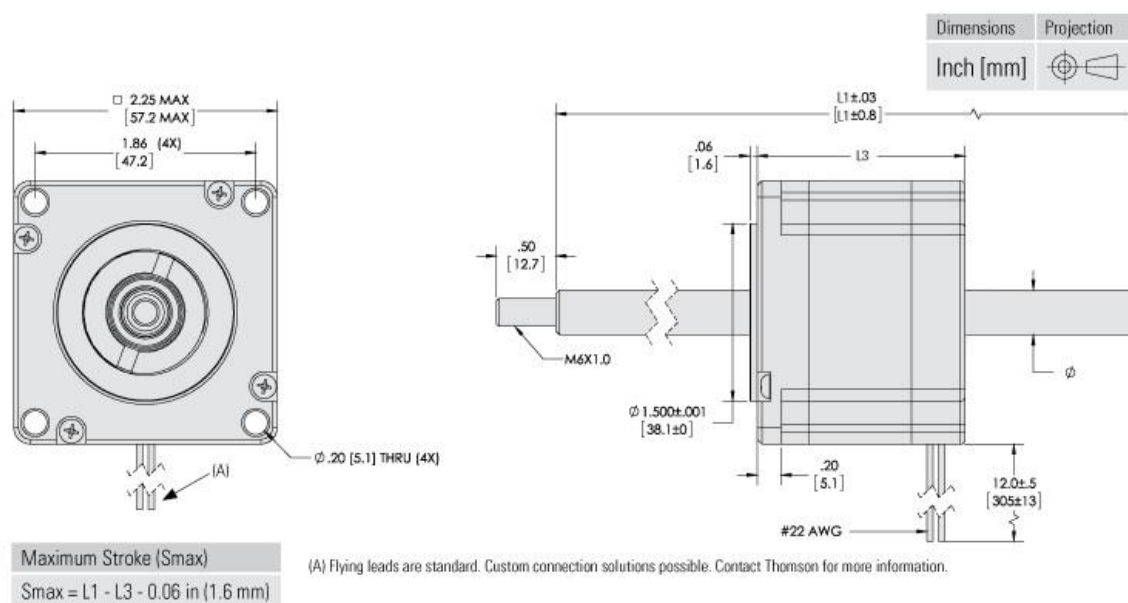
ANEXOS A

PLANOS CONSTRUCTIVOS

ANEXO A

PLANOS CONSTRUCTIVOS

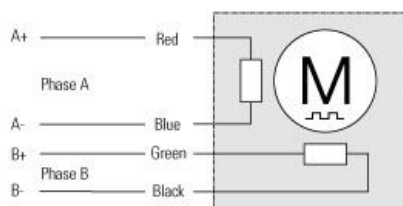
Figura 22. Planos del actuador lineal NEMA 23-A10.



Motor Connection*

| Flying Leads | |
|--------------|-------|
| Lead color | Phase |
| Red | A+ |
| Blue | A- |
| Green | B+ |
| Black | B- |

*Table valid for ML14, ML17 and ML23 motors.



Thompson (2002). *Catálogo de actuadores lineales*. Recuperado de: <https://www.thomsonlinear.com/es/product/MLN23A10-M10200P40600N-C8A0-XXX>

Figura 23. Especificaciones técnicas del actuador lineal NEMA 23- A10

| Especificaciones | Valor | Unidad | Valor |
|--|-------------------------|--|-------------------------|
| Aislamiento de cable con esmalte magnético | Class B 266 °F | [M] | 1.78 in |
| Concentricidad del piloto de montaje al eje (TIR) | 0.003 in | Carrera/paso | 0.00394 in |
| Consumo de energía | 0 W | Descentramiento del husillo | 0.007 in/ft |
| Corriente/fase | 0 A | End Machining, Front, [T] | M6X1.0 Thread X 12.7 mm |
| Humedad, máx. | 85 % | End Machining, Rear | No-Machining |
| Inductancia | 0 Vdc | Linealidad del husillo | 0.005 in/ft |
| Inductancia | 0 mH | Longitud del husillo, máx. recomendada | 406 mm |
| Inercia del rotor | 1.04 oz-in ² | Screw, Lead | 20 mm |
| Juego radial, final | 0.002 in @ 2 lb | Screw, Nomial Diameter | 10 mm |
| Juego radial, máx. | 0.001 in @ 1 lb | | |
| Nombre del motor | NEMA 23 | Rendimiento | Valor |
| Perpendicularidad del eje a la cara de montaje (TIR) | 0.003 in | Ángulo de paso | 1.8 ° |
| Resistencia | 0 Ω | Carrera/paso | 0.00394 in |
| Resistencia de aislamiento | 100 Mohm @ 500 VDC | Fuerza de empuje máx. recomendada | 890 N |
| Resistencia dieléctrica | 500 VAC for 1 minute | Screw, Lead Accuracy | 0.003 in/ft |
| Revestimiento del husillo estándar | No Coating | | |
| Temperatura, almacenamiento | -4 to 122 °F | | |
| Temperatura, carcasa: máx. | 176 °F | | |
| Temperature Max | 125 °F | | |
| Temperature Min | 15 °F | | |
| Tipo de pila | Single Stack | | |
| Tipo de rotación | Rotating Nut | | |

Thompson (2002). *Catálogo de actuadores lineales*. Recuperado de: <https://www.thomsonlinear.com/es/product/MLN23A10-M10200P40600N-C8A0-XXX>

Figura 24. Planos constructivos de la pieza Soporte plataforma

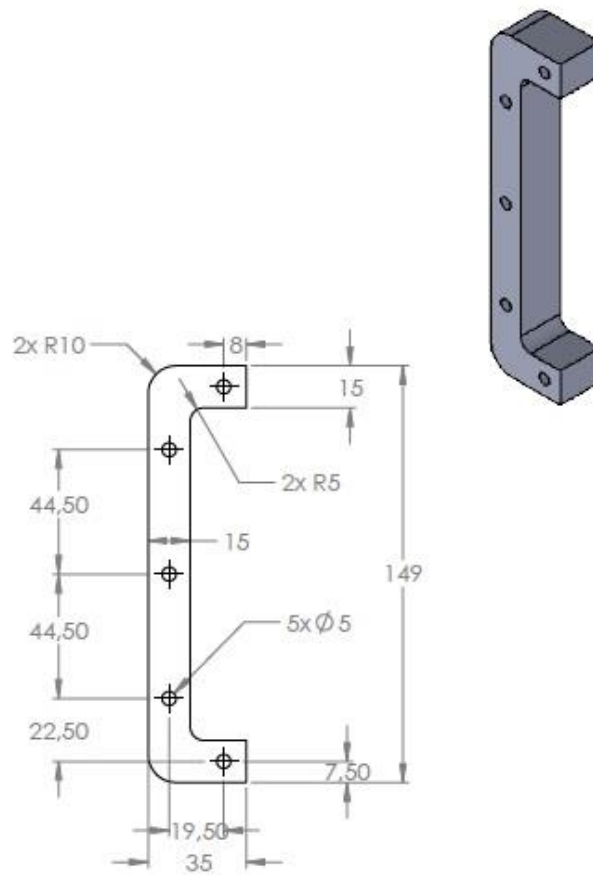


Figura 25. Planos constructivos de la plataforma

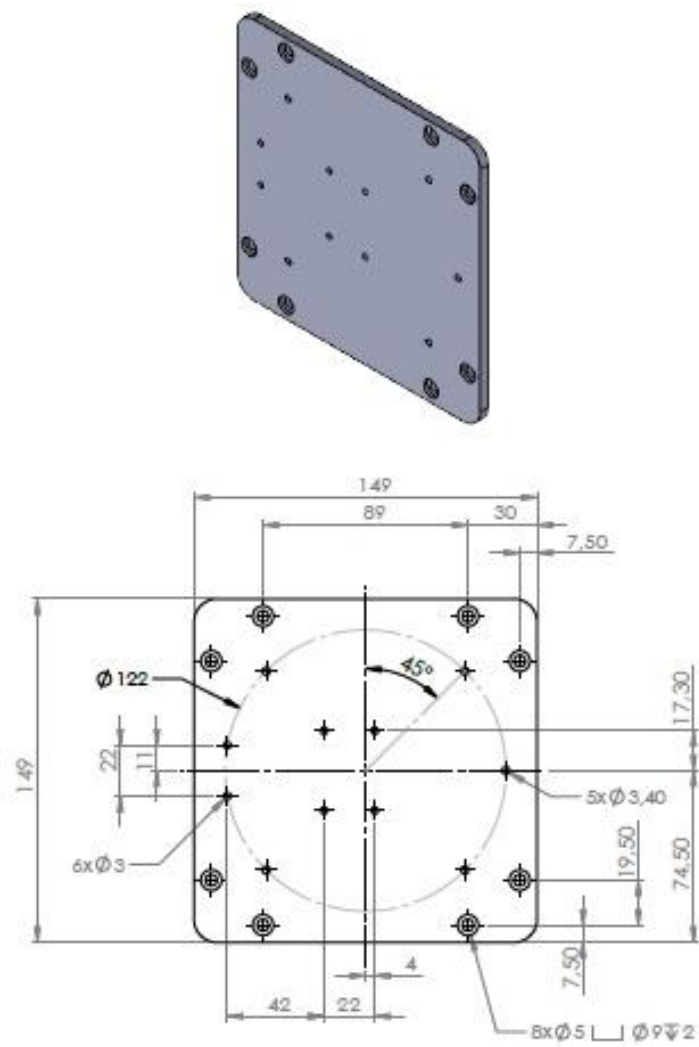


Figura 26. Planos constructivos del bastidor secundario

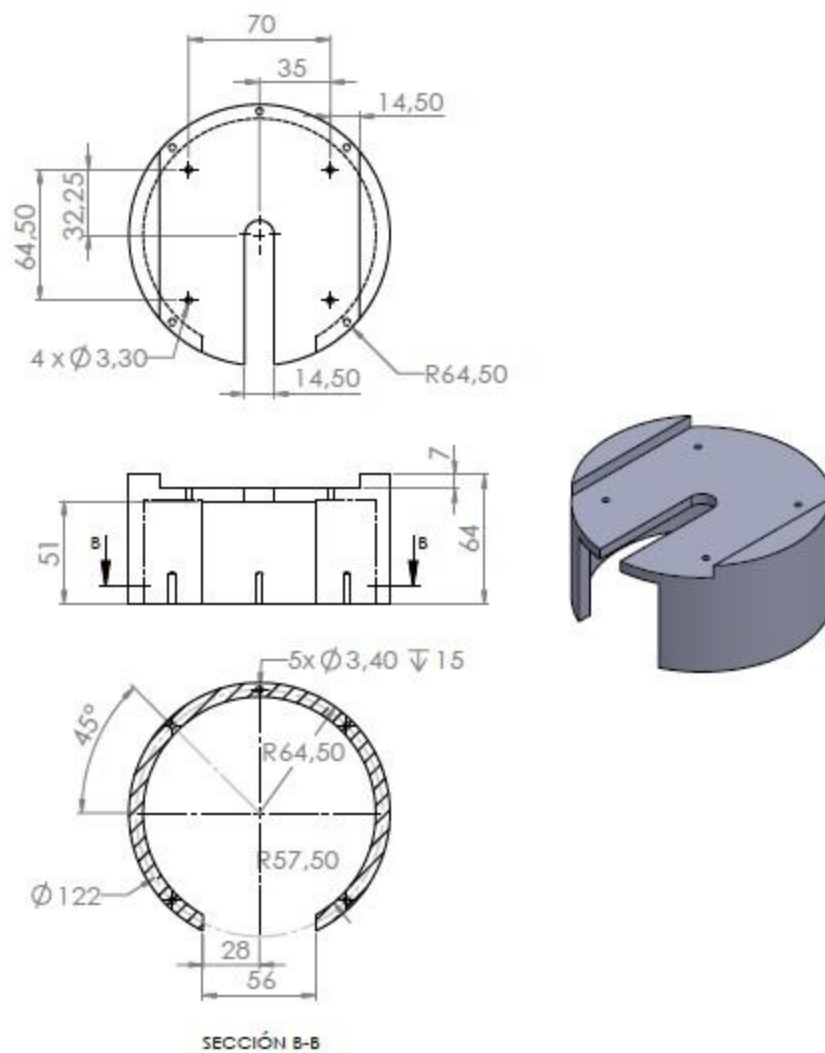


Figura 27. Planos constructivos del bastidor primario

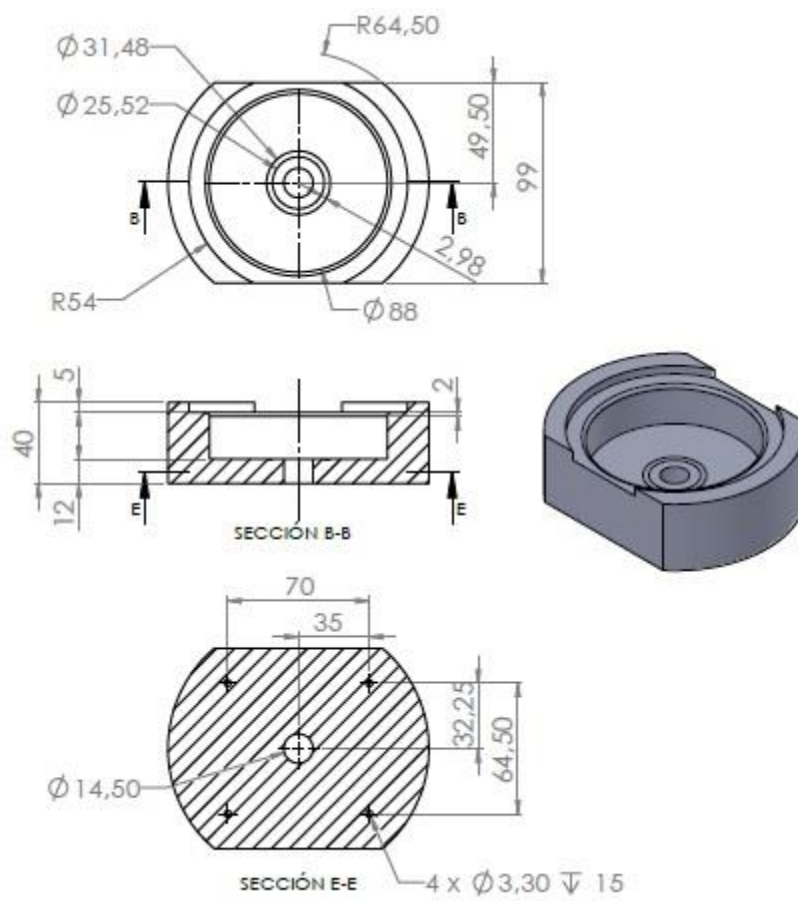


Figura 28. Planos constructivos de la pieza soporte actuador

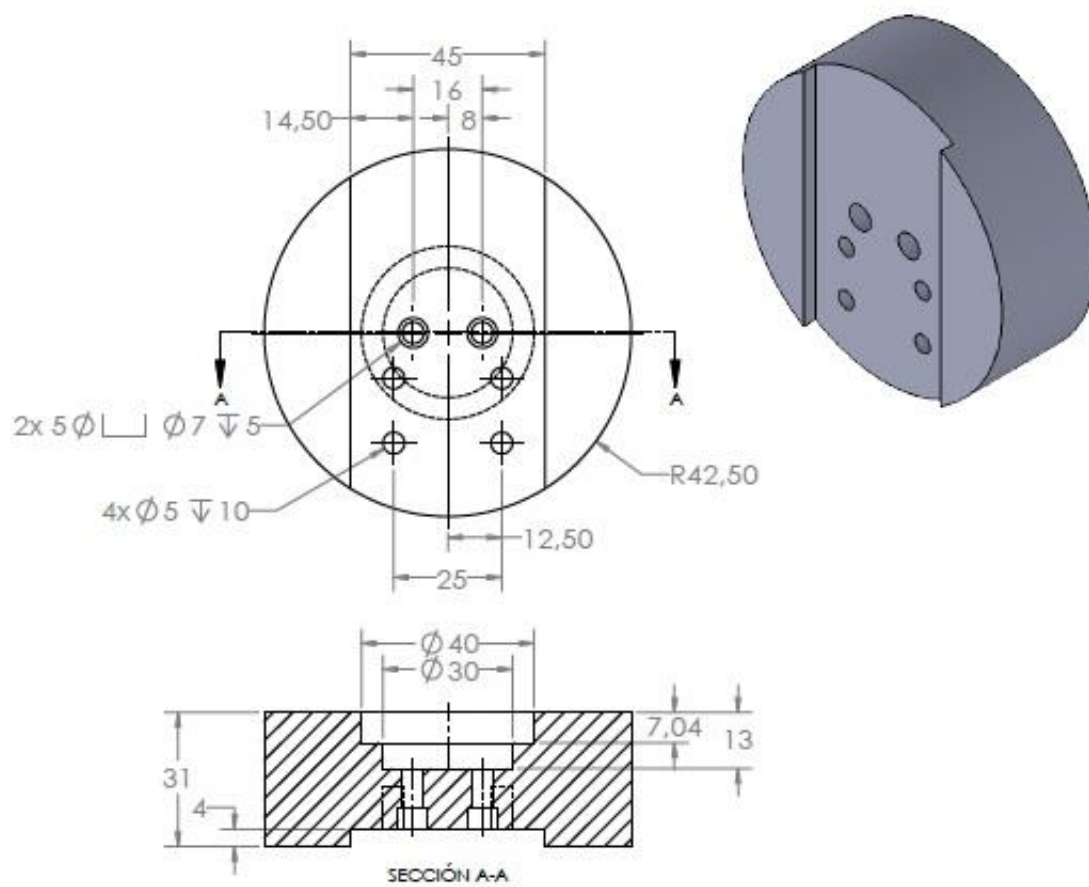


Figura 29. Planos constructivos del Stepper.

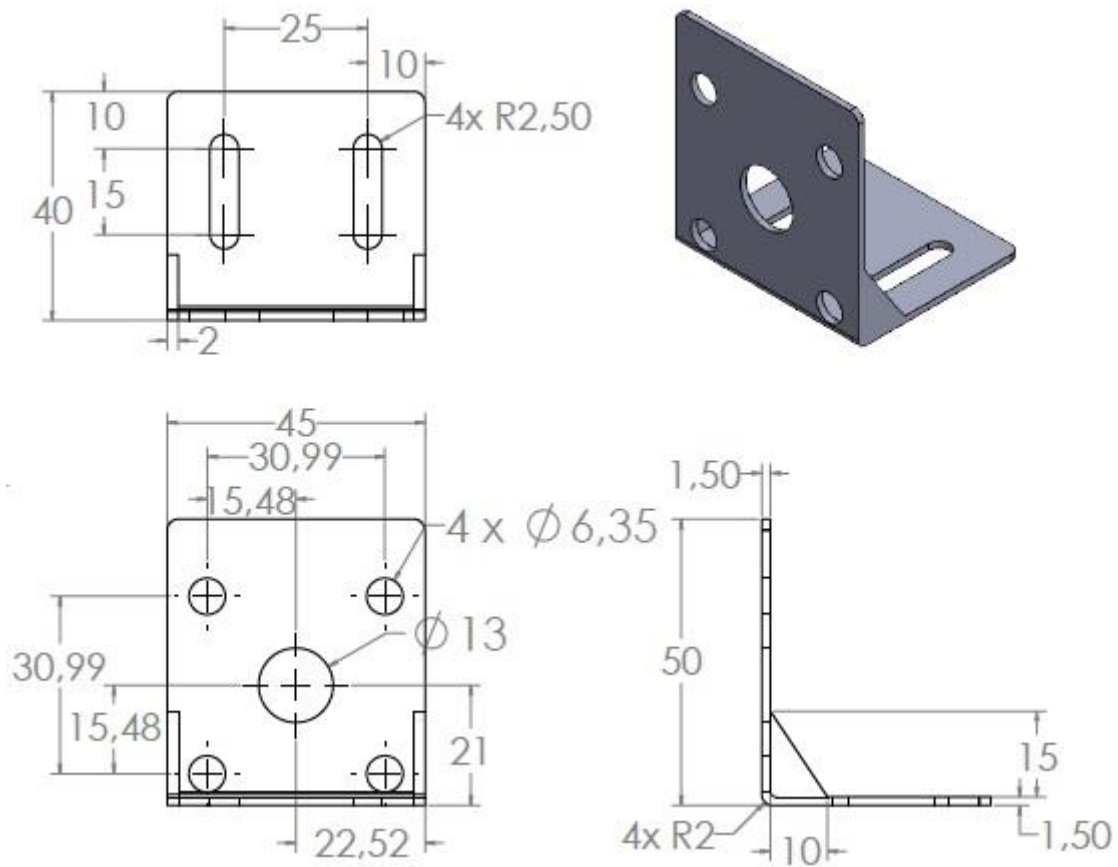


Figura 30. Planos Constructivos de la brida

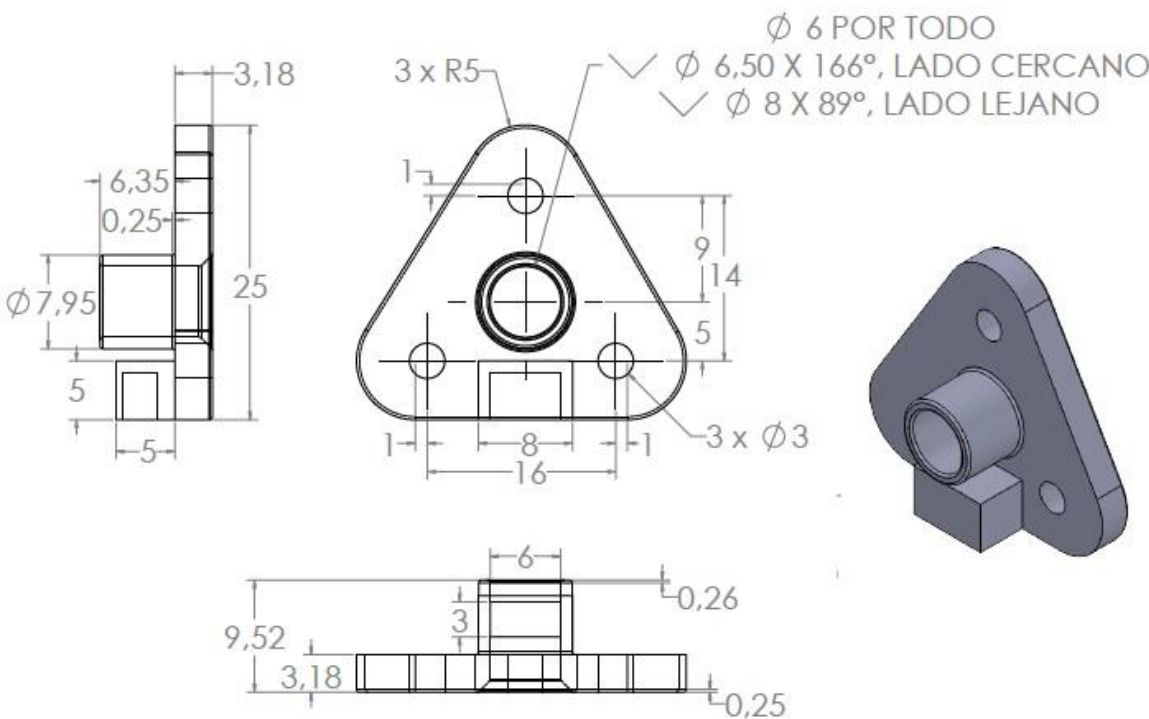
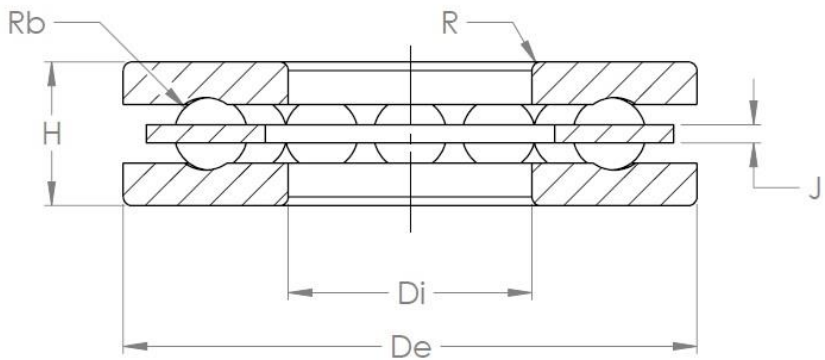


Figura 31. Dimensiones del rodamiento axial



| Diámetro exterior [De] | Diámetro interior [Di] | Redondeo [R] | Radio de bola [Rb] | H | J | Peso [kg] | Material |
|------------------------|------------------------|--------------|--------------------|-------|---------|-----------|------------------|
| 40 mm | 17 mm | 0,6 mm | 2,55 mm | 10 mm | 1,28 mm | 0,05983 | Acero inoxidable |